

010.18
C101C

TRẦN NAM DŨNG (Chủ biên)
VÕ QUỐC BÁ CẦN – LÊ PHÚC LŨ

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN QUA CÁC KỲ THI OLYMPIC

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL / 13266 / 13

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2013

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN QUA CÁC KÌ THI OLYMPIC

Trần Nam Dũng (Chủ biên)
Võ Quốc Bá Cân, Lê Phúc Lữ

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
Khu phố 6, Phường Linh Trung, Quận Thủ Đức, TPHCM
Số 3, Công trường Quốc tế, Quận 3, TP Hồ Chí Minh
ĐT: 38239171 – 38225227 - 38239172
Fax: 38239172 - E-mail: vnuhp@vnuhcm.edu.vn

PHÒNG PHÁT HÀNH NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
Số 3 Công trường Quốc tế - Quận 3 - TPHCM
ĐT: 38239170 - 0982920509 - 0913943466
Fax: 38239172 - Website: www.nxbdhqghcm.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
NGUYỄN HOÀNG DŨNG

Chịu trách nhiệm nội dung:
HUỲNH BÁ LÂN

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm về tác quyền
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

Biên tập:
CAO NGHI THỰC

Sửa bản in:
NGUYỄN HUỲNH

Trình bày bìa:
.....

Mã số ISBN: 978-604-73-1976-3

Số lượng 1.000 cuốn; khổ 16 x 24 cm.

Số đăng ký kế hoạch xuất bản: 1447-2013/CXB/06-82/ĐHQGTPHCM

Quyết định xuất bản số: 194 ngày 30/10/2013 của NXB ĐHQGTPHCM.

In tại Công ty TNHH In và Bao bì Hưng Phú.

Nộp lưu chiếu quý IV năm 2013.

LỜI NÓI ĐẦU

Tháng 7/2013, Đoàn học sinh Việt Nam dự thi Toán quốc tế 2013 tại Colombia đã đạt thành tích vang dội với 3 huy chương vàng và 3 huy chương bạc, trong đó có 02 huy chương vàng của đại diện các tỉnh phía Nam là Phạm Tuấn Huy (học sinh lớp 11) và Trần Thành Trung (học sinh lớp 12) của Trường Phổ thông Năng khiếu – Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh (ĐHQG-HCM). Thành tích này chắc chắn sẽ làm nức lòng các em học sinh chuyên toán ở TP Hồ Chí Minh nói riêng và các tỉnh phía Nam nói chung.

Để giúp các em đang yêu thích môn toán tiếp cận với các đề thi và các chuyên đề Olympic toán học, các giảng viên Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM cùng các cộng sự đã thực hiện việc biên soạn cuốn “CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN QUA CÁC KỲ THI OLYMPIC”. Nội dung cuốn sách này bao gồm các chuyên đề thuộc tất cả các lĩnh vực toán Olympic: Đại số, Giải tích, Hình học, Số học và Tổ hợp với những mức độ chuyên sâu khác nhau, vì thế, phù hợp cho tất cả các học sinh chuyên toán. Bên cạnh đó, cuốn sách cũng giới thiệu các đề thi và lời giải cùng những bình luận chi tiết các kỳ thi quan trọng nhất về Toán của Việt Nam trong năm qua.

Để có được cuốn sách dày dặn với những nội dung phong phú và bổ ích này, nhóm tác giả chân thành cảm ơn sự đóng góp nhiệt tình từ các thầy cô giáo, các bạn học sinh, sinh viên, các thành viên của diễn đàn mathscope. Chúng tôi cũng cảm ơn các đồng nghiệp của Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển Toán học năm 2010-2020; các đồng nghiệp Khoa Toán - Tin học Trường ĐHKHTN, ĐHQG-HCM; đặc biệt cảm ơn GS. Ngô Bảo Châu, GS. Lê Tuấn Hoa và TS. Nguyễn Thị Lê Hương đã luôn động viên, cổ vũ và định hướng cho chúng tôi. Cảm ơn GS. Đàm Thanh Sơn (Đại

học Chicago, Hoa Kỳ) đã gửi cho chúng tôi file video về bài toán 3 của IMO 2013 và gợi ý tưởng hình bìa cuốn sách này.

Chúng tôi cảm ơn Công ty cổ phần giáo dục Titan đã khích lệ chúng tôi hợp tác với Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh để xuất bản cuốn sách này.

Cuối cùng, chúng tôi cảm ơn sự yêu thích và say mê toán học của các em học sinh chuyên toán là nguồn động lực giúp chúng tôi biên soạn cuốn sách này.

Chúc các em thành công.

Nhóm tác giả

MỤC LỤC

Lời nói đầu	iii
Những điều thú vị về tổng $P_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$	
Trần Nam Dũng	1
Bổ đề nâng lũy thừa và ứng dụng	
Trần Minh Hiền, Hoàng Đăng Thiện, Vũ Xuân Anh	19
Bất biến và nửa bất biến trong các bài toán trò chơi	
Nguyễn Thành Khang	47
Cấp số nguyên, căn nguyên thủy và ứng dụng	
Nguyễn Duy Liên	62
Nguyên lý cực trị rời rạc và một số ứng dụng	
Dương Đức Lâm	79
Xung quanh số Fibonacci	
Hoàng Minh Quân	98
Lời giải một bài toán mở	
Võ Quốc Bá Cẩn	137
Đường đôi trung và một số bài toán áp dụng	
Trần Ngọc Thắng	144
Định lý Casey và ứng dụng	
Nguyễn Văn Linh	157
Một số phương pháp giải bài toán tồn tại trong tổ hợp	
Nguyễn Tất Thu	178

Một cách đổi biến và ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức	
Nguyễn Văn Quý và học sinh Nguyễn Quân Bá Hồng . . .	204

Dãy số $u_{n+1} = u_n + (u_n)^\alpha$	
Kiều Đình Minh	232

Phân hoạch nguyên và phân hoạch tập hợp	
Lê Phúc Lữ	250

Lời giải đề thi chọn HSG toán quốc gia năm 2013	
.	285

Lời giải đề thi chọn đội tuyển Olympic toán quốc gia năm 2013	
.	307

Phụ lục 1. Đề thi IMO năm 2013	
.	343

Phụ lục 2. Một số bài toán chọn lọc	
.	345

NHỮNG ĐIỀU THÚ VỊ VỀ TỔNG

$$P_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$$

Trần Nam Dũng[†]

Một học sinh chuyên toán chắc chắn phải biết ít nhiều về tổng $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$. Ngay từ lớp 4, lớp 5, chắc chắn chúng ta đã từng nghe câu chuyện về cậu bé Gauss đã tính tổng các số nguyên từ 1 đến 100 chỉ trong nháy mắt:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 50 \cdot (1 + 100) = 5050.$$

Lớn thêm một chút, lên lớp 7, chúng ta biết rằng một cách tổng quát với mọi số nguyên dương n , đẳng thức sau luôn được thỏa mãn:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

Lên lớp 8, khi bắt đầu làm quen với phép quy nạp toán học, chúng ta lại được thử sức với bài toán: *Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có*

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2)$$

Và lên các lớp trên nữa, chúng ta bắt gặp những yêu cầu phức tạp hơn, chẳng hạn: “*Hãy tính tổng $P_3(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$, $P_4(n) = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4$* ”. Ở đây, phép quy nạp Toán học gặp khó khăn vì ta chưa có công thức, lời giải đòi hỏi phải dự đoán công thức rồi mới tiến hành chứng minh bằng quy nạp Toán học, hoặc là có một cách tiếp cận khác.

Thêm một chút nữa, chúng ta có thể gặp các thử thách khác nghiệt hơn, chẳng hạn tìm tất cả các số nguyên k sao cho $1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k$ chia hết cho p hay tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$.

[†]Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh.

Bài viết này đề cập đến những cách tiếp cận khác nhau để tính tổng $P_k(n)$, qua đó sẽ giới thiệu những tính chất thú vị của $P_k(n)$. Chúng ta sẽ gặp lại những ý tưởng của Johann Faulhauber, Jacob Bernoulli, Jacob Jacobi qua cách trình bày sơ cấp và ngôn ngữ hiện đại. Bên cạnh đó, bài viết cũng giới thiệu một số bài toán Olympic khai thác chủ đề về tổng $P_k(n)$.

1. Các phương pháp tính $P_k(n)$

Nếu như công thức đã được tìm ra như (1) hoặc (2) thì việc chứng minh là không khó khăn, chúng ta có thể dùng một phép quy nạp Toán học đơn giản. Với $k = 3$, ta có thể có nhận xét là:

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 = 1^2, \\ 1^3 + 2^3 &= 9 = 3^2 = (1 + 2)^2, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 &= 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Từ đó đưa ra dự đoán:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Và sau đó áp dụng phép quy nạp Toán học để chứng minh. Tuy nhiên, với k bất kỳ thì việc dự đoán công thức là bất khả thi. Dưới đây, ta đưa ra ba hướng tiếp cận khác nhau (đều ở dưới dạng thuật toán và mang tính tổng quát) để tính $P_k(n)$.

1.1. Phương pháp sai phân

Nhắc lại phương pháp tính tổng bằng sai phân: Để tính tổng $\sum_{k=1}^n u_k$, ta tìm dãy số $\{v_n\}$ sao cho $v_k - v_{k-1} = u_k$. Khi đó:

$$\sum_{k=1}^n u_k = (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \dots + (v_n - v_{n-1}) = v_n - v_0.$$

Như vậy, để tính tổng $S_k(n)$, ta chỉ cần tìm dãy số $\{v_n\}$ sao cho $v_n - v_{n-1} = n^k$. Điều này có thể thực hiện bằng cách xét v_n là một đa thức bậc $k+1$ theo n và áp dụng phương pháp hệ số bất định. Ta xét ví dụ $k = 4$.

Giả sử $v_n = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En$ (ta có thể giả sử hệ số tự do bằng 0). Khi đó đẳng thức $v_n - v_{n-1} = n^4$ tương đương với

$$\begin{aligned} An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + 1 \\ - [A(n-1)^5 + B(n-1)^4 + C(n-1)^3 + D(n-1)^2 + En] = n^4. \end{aligned}$$

So sánh hệ số của n^i ở hai vế với $i = 4, 3, \dots, 1, 0$, ta được hệ:

$$\begin{cases} 5A = 1 \\ -10A + 4B = 0 \\ 10A - 6B + 3C = 0 \\ -5A + 4B - 3C + 2D = 0 \\ A - B + C - D + E = 0 \end{cases}$$

Từ đó giải ra được $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = 0$, $E = -\frac{1}{30}$. Như thế:

$$P_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Phương pháp này khá đơn giản về mặt ý tưởng và cũng khá hiệu quả khi k là các số nhỏ. Tuy nhiên, nếu k lớn thì việc tính toán cũng khá phức tạp. Ta có thể cải tiến phương pháp này để việc tính toán đơn giản và hiệu quả hơn như sau:

Trước hết ta đưa ra một số định nghĩa và tính chất của toán tử sai phân Δ và toán tử ngược ∇ :

Định nghĩa 1. Cho dãy số $\{x_n\}$, dãy sai phân của dãy $\{x_n\}$, ký hiệu là $\{\Delta x_n\}$, được xác định bởi công thức $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

Định nghĩa 2. Cho dãy số $\{x_n\}$. Ta nói dãy $\{y_n\}$ là nguyên hàm của dãy $\{x_n\}$ nếu $\Delta y_n = x_n$. Và khi đó ta viết $y_n = \nabla x_n$.

Để thấy các toán tử Δ và ∇ đều là các toán tử tuyến tính. Việc tính $P_k(n)$ sẽ được tiến hành thuận lợi nhờ vào tính tuyến tính của ∇ và tính chất đẹp đẽ sau:

Định lý 1. Với mọi số nguyên dương n, k , ta có

$$\nabla(n(n+1)\cdots(n+k-1)) = \frac{1}{k+1} \cdot n(n+1)\cdots(n+k-1)(n+k).$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{k+1}(n-1)n(n+1)\cdots(n+k-1)\right) &= \\ &= \frac{1}{k+1}[n(n+1)\cdots(n+k-1)(n+k) \\ &\quad - (n-1)n(n+1)\cdots(n+k-1)] \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot n(n+1)\cdots(n+k-1)[(n+k) - (n-1)] \\ &= n(n+1)\cdots(n+k-1). \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Để cho gọn, ta ký hiệu $\langle n^k \rangle = n(n+1)\cdots(n+k-1)$. Khi đó định lý 1 có thể viết lại thành:

$$\nabla(\langle n^k \rangle) = \frac{1}{k+1} \cdot \langle n^{k+1} \rangle.$$

Bây giờ ta sẽ vận dụng định lý 1 và tính tuyến tính của ∇ để tính $\nabla(n^k)$, từ đó tính được $P_k(n)$. Chẳng hạn, với $k=4$ thì ta phân tích:

$$n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) + An(n+1)(n+2) + Bn(n+1) + Cn.$$

Thay $n=-1$, ta được ngay $C=-1$. Thay $n=-2$, ta được $B=7$ và thay $n=-3$, ta được $A=-6$. Từ đó:

$$\begin{aligned} \nabla(n^4) &= \nabla(\langle n^4 \rangle - 6\langle n^3 \rangle + 7\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle) \\ &= \frac{1}{5}\langle n^5 \rangle - \frac{6}{4}\langle n^4 \rangle + \frac{7}{3}\langle n^3 \rangle - \frac{1}{2}\langle n^2 \rangle \\ &= \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - \frac{6}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \\ &\quad + \frac{7}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

1.2. Phương pháp hệ thức truy hồi

Một cách tiếp cận khác để tính $P_k(n)$ là thiết lập hệ thức truy hồi. Cụ thể, ta có với mọi i thì:

$$(i+1)^{k+1} - i^{k+1} = \sum_{j=0}^k C_{k+1}^j i^j.$$

Cho i chạy từ 1 đến n rồi cộng lại, vế theo vế, ta được

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{j=0}^k C_{k+1}^j P_j(n) = \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+1}^j P_j(n) + (k+1)P_k(n).$$

Từ đó ta có công thức truy hồi:

$$P_k(n) = \frac{(n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+1}^j P_j(n)}{k+1}. \quad (3)$$

Như vậy, nếu biết công thức tính $P_i(n)$ với $i < k$ thì ta sẽ tính được $P_k(n)$. Chẳng hạn, ta đã biết:

$$P_0(n) = n, \quad P_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad P_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Áp dụng công thức (3) cho $k=3$, ta có

$$\begin{aligned} P_3(n) &= \frac{(n+1)^4 - 1 - (P_0(n) + 4P_1(n) + 6P_2(n))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^4 - 1 - n - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1)}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Tiếp tục dùng công thức (3) cho $k = 4$, ta có

$$\begin{aligned} P_4(n) &= \frac{(n+1)^5 - 1 - (P_0(n) + 5P_1(n) + 10P_2(n) + 10P_3(n))}{5} \\ &= \frac{(n+1)^5 - 1 - n - \frac{5}{2}n(n+1) - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)}{5} \\ &= \frac{\frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)}{5} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \end{aligned}$$

Như vậy, dùng công thức (3), ta có thể từng bước, từng bước tính ra $P_k(n)$. Phương pháp này đơn giản về mặt ý tưởng, nhưng về kỹ thuật là tương đối phức tạp và ta phải thực hiện tuần tự các phép tính $P_k(n)$ với k từ nhỏ đến lớn. Dưới đây, chúng ta sẽ xem xét một phương pháp hiệu quả hơn để tính $P_k(n)$, hơn nữa phương pháp này cho phép tính $P_{k+1}(n)$ khi biết $P_k(n)$, tức là ta chỉ cần truy hồi về số hạng trước đó.

1.3. Một tính chất thú vị của đa thức $P_k(n)$ và phương pháp tích phân

Trước hết ta viết lại một số kết quả tính $P_k(n)$:

$$\begin{aligned} P_0(n) &= n, \\ P_1(n) &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}, \\ P_2(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \\ P_3(n) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}, \\ P_4(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}. \end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ có một thay đổi quan trọng. Hàm số $P_k(n)$ được đưa vào như hàm số với biến số không âm. Nhưng bây giờ, sau khi đã thu được nó có dạng đa thức, ta có thể mở rộng định nghĩa cho

tất cả các số thực. Điều này cho phép chúng ta xét đạo hàm, các nghiệm không nguyên...

Để đánh dấu điều này, ta sẽ viết $Q_k(x)$ thay vì $P_k(n)$, và định nghĩa các đa thức $Q_k(x)$ bằng cách truy hồi như sau:

$$Q_0(x) = x, \quad Q_k(x) = \frac{(x+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+1}^j Q_j(x)}{k+1}. \quad (4)$$

Xét các đa thức $Q_k(x)$, ta tính các đạo hàm:

$$\begin{aligned} Q'_1(x) &= x + \frac{1}{2}, \\ Q'_2(x) &= x^2 + x + \frac{1}{6}, \\ Q'_3(x) &= x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \\ Q'_4(x) &= x^4 + 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Quan sát kỹ một chút, ta thấy các thành phần của $Q'_k(x)$ rất giống $Q_{k-1}(x)$, chỉ khác hệ số tự do và một hệ số tỷ lệ. Và thực sự thì ta có thể phát biểu tính chất thú vị của đa thức $Q_k(x)$ như sau:

Định lý 2. Với mọi số nguyên dương k , ta có

$$Q'_k(x) - kQ_{k-1}(x) = \text{const.}$$

Chứng minh. Tính chất đẹp đẽ này có thể chứng minh bằng cách sử dụng phương pháp quy nạp Toán học. Với $k = 1$, mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đã được chứng minh đến $k - 1$, tức là với mọi $i < k$, ta có

$$Q'_i(x) = iQ_{i-1}(x) + c_i.$$

Nhắc lại ta có công thức:

$$Q_k(x) = \frac{(x+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+1}^j Q_j(x)}{k+1}. \quad (4)$$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$Q'_k(x) = (x+1)^k - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+1}^j Q'_j(x).$$

Áp dụng giả thiết quy nạp, thay $Q'_j(x) = jQ_{j-1}(x) + c_j$ vào đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned} Q'_k(x) &= (x+1)^k - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+1}^j (jQ_{j-1}(x) + c_j) \\ &= (x+1)^k - \sum_{j=1}^{k-1} C_k^{j-1} (Q_{j-1}(x) + c_j) \\ &= (x+1)^k - \sum_{j=0}^{k-2} C_k^j (Q_j(x) + c_{j+1}) \\ &= (x+1)^k - 1 - \sum_{j=0}^{k-2} C_k^j Q_j(x) + 1 - \sum_{j=0}^{k-2} C_k^j c_{j+1} \\ &= kQ_{k-1}(x) + c_k. \end{aligned}$$

(Trong biến đổi trên, ta đã sử dụng đẳng thức $\frac{j}{k+1} C_{k+1}^j = C_k^{j-1}$.) Định lý được chứng minh. $\square$

Có được tính chất này, ta xây dựng được một thuật toán hiệu quả để tính $Q_k(x)$ (và từ đó $P_k(n)$) khi biết $Q_{k-1}(x)$. Cụ thể, ta biết:

$$Q'_k(x) = kQ_{k-1}(x) + c_k.$$

Từ đây lấy tích phân, ta được

$$Q_k(x) = k \int P_{k-1}(x) + c_k x.$$

Nhưng ta không biết c_k bằng bao nhiêu? Điều này không đáng ngại, chỉ cần thay $x = 1$ (vì ta biết $Q_k(1) = P_k(1) = 1$) vào công thức trên là ta tìm được ngay c_k . Ví dụ, để tính $Q_5(x)$, ta có

$$Q'_5(x) = 5Q_4(x) + c_5 = x^5 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x + c_5.$$

Suy ra

$$Q_5(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^2}{12} + c_5 x.$$

Thay $x = 1$, ta được $c_5 = 0$. Từ đó:

$$\begin{aligned} P_5(n) = Q_5(n) &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} \\ &= \frac{n^2(n+1)(2n^2+2n-1)}{12}. \end{aligned}$$

Nếu tiếp tục thực hiện:

$$Q'_6(x) = 6Q_5(x) + c_6 = x^6 + 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c_6,$$

ta được

$$Q_6(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{2} + \frac{x^5}{2} - \frac{x^3}{6} + c_6 x.$$

Thay $x = 1$, ta được $c_6 = \frac{1}{42}$. Vậy:

$$\begin{aligned} P_6(n) = Q_6(n) &= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} \\ &= \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1). \end{aligned}$$

Chú ý. Sử dụng cách chứng minh của Định lý 2, ta có thể chứng minh kết quả tổng quát sau đây được Jacob Bernoulli tìm ra năm 1713: Ta định nghĩa các số B_n một cách truy hồi như sau:

$$B_0 = 1, \quad \sum_{j=0}^m C_{m+1}^j B_j = 0.$$

Khi đó ta có

$$1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k C_{k+1}^j B_j n^{k+1-j}.$$

Các số B_j được gọi là các số Bernoulli.

2. Các tính chất của đa thức $Q_k(x)$

Ngoài các tính chất mang tính định nghĩa là công thức (4) và công thức ở định lý 2, đa thức $Q_k(x)$ còn có nhiều tính chất thú vị khác. Dưới đây chúng ta xem xét một số các tính chất đó.

Định lý 3. (1) Nếu k là số lẻ không nhỏ hơn 3 thì $Q_k(x)$ chia hết cho $x^2(x+1)^2$.

(2) Nếu k là số chẵn không nhỏ hơn 2 thì $Q_k(x)$ chia hết cho $x(x+1)(2x+1)$.

Chứng minh. Để chứng minh các tính chất trên, ta chỉ cần chứng minh:

- $Q_k(0) = 0 = Q'_k(0)$ và $Q_k(-1) = 0 = Q'_k(-1)$ với $k \geq 3$, k lẻ;
- $Q_k(0) = 0$, $Q_k(-1) = 0$ và $Q_k(-\frac{1}{2}) = 0$ với $k \geq 2$, k chẵn.

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có với mọi số nguyên dương i :

$$(i+1)^{k+1} - (i-1)^{k+1} = 2(C_{k+1}^1 i^k + C_{k+1}^3 i^{k-2} + \dots).$$

Cho i chạy từ 1 đến n và cộng lại vế theo vế, ta được

$$(n+1)^{k+1} + n^{k+1} - 1 = 2(C_{k+1}^1 P_k(n) + C_{k+1}^3 P_{k-2}(n) + \dots).$$

Ta thu được công thức truy hồi giữa $P_k(n)$ và $P_{k-2}(n)$, $P_{k-4}(n)$, ...
Ta có thể mở rộng công thức này cho đa thức $Q_k(x)$ và thu được:

$$2(k+1)Q_k(x) = (x+1)^{k+1} + x^{k+1} - 1 - 2(C_{k+1}^3 Q_{k-2}(x) + C_{k+1}^5 Q_{k-4}(x) + \dots). \quad (5)$$

Bây giờ ta sẽ xét riêng trường hợp k lẻ và k chẵn.

- Nếu k là số lẻ và $k \geq 3$ thì biểu thức cuối cùng trong đẳng thức (5) là $C_{k+1}^k Q_1(x)$ và bằng $(k+1) \cdot \frac{x(x+1)}{2}$, như vậy:

$$2(k+1)Q_k(x) = (x+1)^{k+1} + x^{k+1} - 1 - 2(C_{k+1}^3 Q_{k-2}(x) + \dots + C_{k+1}^{k-2} Q_3(x)) - (k+1)x(x+1). \quad (6)$$

Từ công thức này, dễ dàng chứng minh bằng quy nạp được rằng $Q_k(0) = 0$, $Q_k(-1) = 0$ với mọi $k \geq 3$, k lẻ. Lấy đạo hàm hai vế đẳng thức (6), ta được

$$2(k+1)Q'_k(x) = (k+1)(x+1)^k + (k+1)x^k - 2(C_{k+1}^3 Q'_{k-2}(x) + \dots + C_{k+1}^{k-2} Q'_3(x)) - (k+1)(2x+1).$$

Từ đây dễ dàng chứng minh quy nạp được

$$Q'_k(0) = 0, \quad Q'_k(-1) = 0,$$

từ đó suy ra $Q_k(x)$ chia hết cho $x^2(x+1)^2$.

- Với k chẵn thì số hạng cuối cùng trong đẳng thức (5) là $C_{k+1}^{k+1} Q_0(x) = x$, như vậy ta có

$$2(k+1)Q_k(x) = (x+1)^{k+1} + x^{k+1} - 1 - 2(C_{k+1}^3 Q_{k-2}(x) + \dots + C_{k+1}^{k-1} Q_2(x)) - 2x. \quad (7)$$

Từ (7), dễ dàng chứng minh được rằng với $k \geq 2$, k chẵn thì ta có $Q_k(0) = 0$, $Q_k(-1) = 0$, $Q_k(-\frac{1}{2}) = 0$ và như vậy $Q_k(x)$ chia hết cho $x(x+1)(2x+1)$. $\square$

Quan sát các biểu thức $P_k(n)$, ta nhận thấy biểu thức $n(n+1)$ xuất hiện một cách khá đều đặn. Cụ thể, nếu đặt $N = n(n+1)$ thì ta có thể viết:

$$P_1(n) = \frac{1}{2}N,$$

$$P_3(n) = \frac{1}{4}N^2,$$

$$P_5(n) = \frac{1}{12}N^2(2N-1),$$

$$P_7(n) = \frac{1}{24}N^2(3N^2-4N+2),$$

và

$$P_2(n) = \frac{1}{6}(2n+1)N,$$

$$P_4(n) = \frac{1}{30}(2n+1)N(3N-1),$$

$$P_6(n) = \frac{1}{42}(2n+1)N(3N^2-3N+1).$$

Điều này được phát hiện đầu tiên bởi Johann Faulhauber (1580-1635), một nhà Đại số là bạn của Johannes Kepler và Rene Descartes. Cũng như phong cách của các nhà Toán học thời kỳ này, ông chỉ ghi ra các công thức (cho đến $k = 23$) nhưng không đưa ra chứng minh. Sau này tính chất này được chứng minh một cách chặt chẽ bởi Jacobi. Ta phát biểu tính chất mà Faulhauber phát hiện được dưới dạng định lý:

Định lý 4. (1) Nếu k lẻ thì $P_k(n)$ là đa thức theo N ;
(2) Nếu k chẵn thì $P_k(n)$ bằng $2n+1$ nhân với một đa thức theo N .

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh nếu k lẻ thì $Q_k(-x-1) = Q_k(x)$ với mọi x thực. Điều này có thể chứng minh dễ dàng bằng quy nạp và sử dụng công thức (6), với chú ý là với k lẻ thì:

$$\begin{aligned} (-x-1+1)^{k+1} + (-x-1)^{k+1} - (k+1)(-x-1)(-x-1+1) \\ = x^{k+1} + (x+1)^{k+1} - (k+1)x(x+1). \end{aligned}$$

Như thế với k lẻ thì $Q_k(x)$ là hàm đối xứng qua điểm $-\frac{1}{2}$. Vì vậy $Q_k(x)$ khi khai triển qua lũy thừa của $x + \frac{1}{2}$ sẽ chỉ gồm các lũy thừa chẵn. Vì $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$ nên từ đây suy ra $Q_k(x)$ là đa thức của $x(x+1)$.

Để chứng minh vế thứ hai của định lý, với k chẵn ta đặt:

$$S_k(x) = \frac{Q(x)}{2x+1}$$

thì theo định lý 3, $S_k(x)$ cũng là đa thức. Tiếp theo, sử dụng công thức (7), ta viết được

$$\begin{aligned} 2(k+1)S_k(x) &= \frac{(x+1)^{k+1} + x^{k+1}}{2x+1} - 1 \\ &\quad - 2(C_{k+1}^3 S_{k-2}(x) + \dots + C_{k+1}^{k-1} S_2(x)). \end{aligned} \quad (8)$$

Áp dụng (8) và phép quy nạp Toán học, ta cũng chứng minh được $S_k(-x-1) = S_k(x)$ với mọi x thực và sau đó lý luận như ở trên để hoàn tất phép chứng minh. $\square$

3. Các bài toán Olympic liên quan đến tổng $P_k(n)$

3.1. Đề bài

Trong phần này chúng tôi giới thiệu một số bài tập và đề thi có liên quan đến tổng $P_k(n)$. Các bài tập này có thể có tính chất Đại số (liên quan đến đa thức $P_k(n)$, bất đẳng thức), tính chất Số học (chia hết), Giải tích (đánh giá các tổng, giới hạn) và thậm chí Tổ hợp. Các bài toán này được lấy từ các đề thi Olympic các nước, cũng như từ các cuốn sách Olympic kinh điển.

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k thì tổng $1^k + 2^k + \dots + n^k$ là một đa thức bậc $k+1$ của n . Tìm hệ số của n^{k+1} và n^k của đa thức này.

Bài toán 2 (Đại học Sư phạm Hà Nội, 2010). Giả sử đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện $P(n) = 1^{2010} + 2^{2010} + \dots + n^{2010}$ với mọi n nguyên dương. Hãy tính $P(-\frac{1}{2})$.

Bài toán 3. Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số nguyên dương phân biệt thì

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2.$$

Bài toán 4 (Rumani, 1999). Chứng minh rằng bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn với các số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Bài toán 5 (Nga, 2000). Dãy số $a_1, \dots, a_{2000}$ thỏa mãn điều kiện với mọi $n, 1 \leq n \leq 2000$ thì

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy số đều nguyên.

Bài toán 6 (Nga, 2002). Dãy số $a_0, a_1, \dots, a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_0 = 0$ và $0 \leq a_{k+1} - a_k \leq 1$ với mọi $0 \leq k \leq n-1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Bài toán 7 (Nga, 2002). Dãy số $a_0, a_1, \dots, a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_0 = 0$ và $1 \leq a_{k+1} - a_k$ với mọi $0 \leq k \leq n-1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Bài toán 8 (Rumani, 2001). Cho k và $n_1, n_2, \dots, n_k$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_k$) là các số nguyên dương lẻ. Chứng minh rằng

$$n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 - \dots - n_{k-1}^2 + n_k^2 \geq 2k^2 - 1.$$

Bài toán 9. Cho biết $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, hãy chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số nguyên dương phân biệt thì ta có

$$(x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_n^5) + (x_1^7 + x_2^7 + \dots + x_n^7) \geq 2(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3)^2.$$

Bài toán 10. Chứng minh rằng nếu k là số nguyên dương lẻ và n là số nguyên dương bất kỳ thì $1^k + 2^k + \dots + n^k$ chia hết cho $1 + 2 + \dots + n$.

Bài toán 11 (Bulgaria, 2004). Tìm tất cả các số nguyên tố lẻ p sao cho:

$$p \mid (1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + 2004^{p-1}).$$

Bài toán 12 (Hungary-Israel Math competition, 2009). Cho $p \geq 2$ là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho $S_k = 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k$ chia hết cho p .

Bài toán 13. Với mỗi số nguyên dương n , tổng $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ được viết dưới dạng $\frac{p_n}{q_n}$ với p_n, q_n là các số nguyên tố cùng nhau.

(a) Chứng minh rằng 3 không chia hết p_{67} .

(b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 3 chia hết p_n .

Bài toán 14. Tìm phần nguyên của số:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

Bài toán 15. Tìm phần nguyên của số:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}.$$

Bài toán 16. Chứng minh rằng với mọi số thực dương α , ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Bài toán 17. Với mỗi số nguyên n ($n > 2$), đặt $a_n = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Chứng minh rằng

$$1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} < a_{n+1}.$$

Bài toán 18. Các số $1, 2, \dots, n$ được viết trên bảng. Mỗi một phút, một học sinh lên bảng, chọn hai số x và y , xóa chúng đi và viết lên bảng số $2x + 2y$. Quá trình này tiếp diễn cho đến khi trên bảng chỉ còn lại một số. Chứng minh rằng số này không nhỏ hơn $\frac{4n^3}{9}$.

Bài toán 19. Giả sử $x(x+1) \dots (x+k-1) = x^k + A_1 x^{k-1} + A_2 x^{k-2} + \dots + A_{k-1} x$. Chứng minh rằng ta có công thức truy hồi:

$$P_k(n) = \frac{(n+1)n(n-1) \dots (n-k+1)}{k+1} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} A_j P_{k-j}(n).$$

3.2. Đáp số, hướng dẫn và lời giải tóm tắt

1. Hệ số của n^{k+1} bằng $\frac{1}{k+1}$, còn hệ số của n^k bằng $\frac{1}{2}$.

2. Xem định lý 3. Ngoài ra, có thể sử dụng một lý luận khác như sau: Xét $p = 2n + 1$ là số nguyên tố, chứng minh $P(n)$ chia hết cho p . Từ đó suy ra $P(-\frac{1}{2})$ chia hết cho p , chọn p đủ lớn suy ra $P(-\frac{1}{2}) = 0$. Chi tiết xem tại [2].

3. Sắp thứ tự $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ và chứng minh quy nạp. Chú ý khi đó:

$$2(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) \leq (x_n - 1)x_n.$$

4, 6, 7, 8, 9. Tương tự bài 3.

5. Để giải bài toán này, ta chứng minh bằng quy nạp theo n rằng với mọi số nguyên dương n , tổng $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ biểu diễn được dưới dạng $\frac{b_n(b_n+1)}{2}$ với b_n là số nguyên.

Với $n = 1$, ta có $a_1^3 = a_1^2$ suy ra $a_1 = 0$ hoặc $a_1 = 1$. Như vậy ta có thể chọn tương ứng $b_1 = 0$ hoặc $b_1 = 1$. Giả sử ta đã có $S_n = \frac{b_n(b_n+1)}{2}$. Xét đẳng thức:

$$a_1^3 + \dots + a_n^3 + a_{n+1}^3 = (S_n + a_{n+1})^2$$

$$\Leftrightarrow a_1^3 + \dots + a_n^3 + a_{n+1}^3 = S_n^2 + 2a_{n+1}S_n + a_{n+1}^2.$$

Vì $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = S_n^2$ nên từ đây suy ra

$$a_{n+1}^3 = 2a_{n+1}S_n + a_{n+1}^2.$$

Một cách tương đương, ta có

$$a_{n+1}^3 = b_n(b_n + 1)a_{n+1} + a_{n+1}^2,$$

hay

$$a_{n+1}(a_{n+1} - b_n - 1)(a_{n+1} + b_n) = 0.$$

Như vậy $a_{n+1} = 0$ hoặc $a_{n+1} = b_n + 1$ hoặc $a_{n+1} = -b_n$. Khi đó $S_{n+1} = \frac{b_n(b_n+1)}{2}$ hoặc $\frac{(b_n+1)(b_n+2)}{2}$ hoặc $\frac{(b_n-1)b_n}{2}$ đều đúng yêu cầu. Như thế S_n nguyên với mọi n , suy ra a_n nguyên với mọi n .

10. Chú ý là $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

11. Chú ý là $k^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$ nếu k là bội của p và $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ trong trường hợp ngược lại. Suy ra

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + 2004^{p-1} \equiv \left\lfloor \frac{2004}{p} \right\rfloor \cdot 0 + \left(2004 - \left\lfloor \frac{2004}{p} \right\rfloor \right) \cdot 1 \pmod{p}.$$

Vậy ta phải có

$$2004 \equiv \left\lfloor \frac{2004}{p} \right\rfloor \pmod{p}. \quad (*)$$

Từ đây suy ra $p < 2004$. Đặt $2004 = pq + r$ với $0 \leq r \leq p-1$ thì $\left\lfloor \frac{2004}{p} \right\rfloor = q$ và ta phải có

$$r \equiv q \pmod{p}.$$

Nếu $q < p$ thì $q = r$ và như thế $2004 = pq + r = (p+1)q \leq p^2 - 1$. Suy ra $p \geq 47$. Vì $p+1$ là ước của $2004 = 3 \cdot 4 \cdot 167$ nên từ đây suy ra $p = 2003$ là nghiệm duy nhất trong trường hợp này.

Nếu $q \geq p$ thì $p^2 \leq pq \leq 2004$, suy ra $p \leq 43$. Kiểm tra trực tiếp hệ thức (*), ta được $p = 17$.

12. Sử dụng căn nguyên thủy.

13. Đáp số: $n = 2, 7$ và 22 . Đặt $S_n = \frac{k_n}{3^{m_n} l_n}$ với k_n, l_n là các số nguyên dương không chia hết cho 3 và m_n là số nguyên. Khi đó:

$$S_{3n} = \frac{S_n}{3} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1}$$

$$= \frac{k_n}{3^{m_n+1} l_n} + 3 \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_n b_n + 3^{m_n+2} a_n}{3^{m_n+1} l_n b_n},$$

trong đó b_n không chia hết cho 3. Như vậy nếu $m_n \geq -1$ thì $m_{3n} = m_n + 1$. Tương tự, ta có $m_{3n+2} = m_n + 1$ nếu $m_n \geq -1$ và $m_{3n+1} = m_n + 1$ nếu $m_n \geq 0$.

14, 15, 16, 17. Sử dụng bất đẳng thức kép:

$$(\alpha + 1)n^\alpha < (n + 1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} < (\alpha + 1)(n + 1)^\alpha.$$

Bất đẳng thức này có thể chứng minh bằng cách sử dụng định lý Lagrange hoặc biến đổi đại số (trong trường hợp α là số hữu tỷ).

18. Sử dụng đơn biến $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2x+2y}$, dẫn đến bài toán đánh giá tổng $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

19. Xem phần phương pháp sai phân.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2002.
- [2] Trần Nam Dũng, *Lời giải và bình luận đề thi các tỉnh và các trường Đại học năm học 2009-2010*, Ebook.
- [3] Prasolov V.V, *Đa thức*, Nhà xuất bản MCCME, Moscow, 2000. (Tiếng Nga)

- [4] Agakhanov N.Kh, Bogdanov I.I, Kozevnikov P.A, Podlipsky O.K, Tereshin D.A, *Olympic toàn Nga 1993-2006*, Nhà xuất bản MCCME, Moscow, 2007. (Tiếng Nga)
- [5] Skliarsky D.O, Chentsov N.N, Iaglom I.M, *Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*, Dover Publications, New York, 1993.
- [6] Peter Boyvalenkov, Emil Kolev, Oleg Muskarov, Nikolai Nikolov, *Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006*, GIL, 2007.
- [7] Shailesh A Shirali, *On Sums of Powers of Integers*, Resonance, July 2007.
- [8] Beardon A.F, *Sums of Powers of Integers*, Mathematical Monthly, March 1996.
- [9] Heinrich Dorrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications, New York, 1965.
- [10] Ken Wards Mathematics Pages, *Series Sums of the Powers of the Natural Numbers and Bernoulli Numbers*,
http://www.trans4mind.com/personal_Edevelopment/mathematics/series/sumsBernoulliNumbers.htm.
- [11] Các tài liệu về các cuộc thi Olympic Toán và một số tài liệu Internet khác.

BỔ ĐỀ NÂNG LŨY THỪA VÀ ỨNG DỤNG

Trần Minh Hiền
và các học sinh Hoàng Đăng Thiện, Vũ Xuân Anh[†]

1. Định nghĩa và tính chất

Lý thuyết này là hạt nhân trong lý thuyết số cộng tính. Đây là kết quả hay và có nhiều ứng dụng. Việc hiểu bản chất là hết sức quan trọng để có thể sử dụng được kết quả này.

Định nghĩa 1. Cho p là số nguyên tố, a là số nguyên và α là số tự nhiên. Ta nói p^α là **ước đúng** của a , và α được gọi là **số mũ đúng** của p trong khai triển của a nếu $p^\alpha \mid a$ và $p^{\alpha+1} \nmid a$. Khi đó ta viết $p^\alpha \parallel a$ và ký hiệu $\alpha = v_p(a)$. Nếu $\alpha = v_p(a)$ thì $a = p^\alpha k$ với $(k, p) = 1$.

Lấy ví dụ, ta có $v_3(63) = 2$ vì $3^2 = 9 \mid 63$ và $3^3 = 27 \nmid 63$.

Rõ ràng nếu n có sự phân tích tiêu chuẩn $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ thì khi đó:

$$v_{p_1}(n) = \alpha_1, \quad v_{p_2}(n) = \alpha_2, \quad \dots, \quad v_{p_n}(n) = \alpha_n.$$

Trong khi làm toán liên quan đến n , ta thường chỉ làm việc với phần tử “cực hạn”, tức là ước nguyên tố p nhỏ nhất của n . Khi đó ta chỉ quan tâm tới lũy thừa của p trong n , tức $v_p(n)$.

Nói về tính chất của $v_p(n)$, ta có nhận xét sau đây:

Nhận xét. Nếu p, q là hai số nguyên tố khác nhau thì ta có $v_p(p^\alpha q^\beta) = \alpha$.

[†]Trường THPT Chuyên Quang Trung, Bình Phước.

Mệnh đề 1. Cho a, b là các số nguyên, p là số nguyên tố. Khi đó:

1. Nếu $v_p(a) = \alpha, v_p(b) = \beta$ thì $v_p(ab) = \alpha + \beta$.
2. Nếu $(p, a) = 1$ thì $v_p(a) = 0$.
3. Nếu $v_p(a) = \alpha$ thì $v_p(a^k) = k\alpha$.
4. Nếu $v_p(a) = \alpha, v_p(b) = \beta$ và $\alpha \neq \beta$ thì khi đó:

$$v_p(a + b) = \min\{\alpha, \beta\}.$$

Một cách tổng quát, ta luôn có

$$v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}.$$

5. Nếu $n \mid m$ thì $v_p(n) \leq v_p(m)$.

Chứng minh. Việc chứng minh các kết quả trên là hiển nhiên. $\square$

Mệnh đề 2. Cho x, y là hai số nguyên và n là số nguyên dương. Xét p là số nguyên tố sao cho:

$$(n, p) = 1, \quad p \mid (x - y), \quad p \nmid x, \quad p \nmid y,$$

khi đó ta có kết quả sau:

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y).$$

Chứng minh. Chúng ta sử dụng hằng đẳng thức:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1}).$$

Mệnh đề được chứng minh nếu chứng tỏ được:

$$p \nmid (x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1}).$$

Để chứng tỏ điều này, ta sẽ sử dụng giả thiết $p \mid (x - y)$, tức $x \equiv y \pmod{p}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} & x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1} \\ & \equiv x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + x^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} \\ & \equiv nx^{n-1} \not\equiv 0 \pmod{p}, \end{aligned}$$

vì $(n, p) = 1, p \nmid x$. Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 3. Cho x, y là hai số nguyên, n là số nguyên dương lẻ. Xét p là số nguyên tố sao cho:

$$(n, p) = 1, \quad p \mid (x + y), \quad p \nmid x, \quad p \nmid y.$$

Khi đó, ta có

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y).$$

Chứng minh. Do x và y có thể nguyên âm nên sử dụng mệnh đề trên ta được:

$$v_p(x^n - (-y)^n) = v_p(x - (-y)) \Rightarrow v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y).$$

Chú ý là n là số nguyên dương lẻ nên ta mới có sự thay thế $(-y)^n$ bởi $-y^n$. $\square$

Định lý 1 (Định lý về số mũ đúng 1 (LTE)). Cho x, y là hai số nguyên (không nhất thiết nguyên dương) và n là số nguyên dương. Xét p là số nguyên tố lẻ sao cho:

$$= p \mid (x - y), \quad p \nmid x, \quad p \nmid y.$$

Khi đó, ta có

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n).$$

Lưu ý trong định lý trên, không cần giả thiết $(p, n) = 1$.

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng minh định lý đối với $n = p$, tức là cần chứng minh:

$$v_p(x^p - y^p) = v_p(x - y) + 1. \quad (*)$$

Để chứng minh điều này, ta sẽ chứng minh:

$$p \mid (x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots + xy^{p-2} + y^{p-1}) \quad (1)$$

và

$$p^2 \nmid (x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots + xy^{p-2} + y^{p-1}). \quad (2)$$

Thật vậy, do $x \equiv y \pmod{p}$ nên:

$$x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots + y^{p-1} \equiv p \cdot x^{p-1} \equiv 0 \pmod{p},$$

tức (1) được chứng minh. Để chứng minh (2), ta cần chú ý sau, vì $x - y : p$ nên $y = x + kp$, với k nguyên. Khi đó với mỗi số nguyên $1 \leq t < p$ thì:

$$\begin{aligned} y^t x^{p-1-t} &\equiv (x + kp)^t \cdot x^{p-1-t} \\ &\equiv x^{p-1-t} \left[x^t + t \cdot (kp) \cdot x^{t-1} + \frac{t(t-1)}{2} \cdot (kp)^2 \cdot x^{t-2} + \dots \right] \\ &\equiv x^{p-1-t} [x^t + t \cdot (kp) \cdot x^{t-1}] \\ &\equiv x^{p-1} + tkpx^{p-2} \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Vậy ta luôn có:

$$y^t x^{p-1-t} \equiv x^{p-1} + tkpx^{p-2} \pmod{p^2}, \quad t = 1, 2, 3, \dots, p-1.$$

Sử dụng kết quả này ta được:

$$\begin{aligned} x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots + xy^{p-2} + y^{p-1} \\ &\equiv x^{p-1} + (x^{p-2} + kpx^{p-2}) + (x^{p-2} + 2kpx^{p-2}) \\ &\quad + \dots + [x^{p-1} + (p-1)kpx^{p-2}] \\ &\equiv px^{p-1} + [1 + 2 + \dots + (p-1)]kpx^{p-2} \\ &\equiv px^{p-1} + \left(\frac{p-1}{2}\right)kp^2x^{p-1} \\ &\equiv px^{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Vậy (2) được chứng minh. Bây giờ, với n tùy ý, ta có thể viết $n = p^\alpha b$ với $(p, b) = 1$. Thế thì ta có $v_p(n) = \alpha$. Khi đó:

$$\begin{aligned} v_p(x^n - y^n) &= v_p\left((x^{p^\alpha})^b - (y^{p^\alpha})^b\right) \\ &= v_p\left(x^{p^\alpha} - y^{p^\alpha}\right) \quad (\text{sử dụng mệnh đề 2}) \\ &= v_p\left((x^{p^{\alpha-1}})^p - (y^{p^{\alpha-1}})^p\right) \\ &= v_p\left(x^{p^{\alpha-1}} - y^{p^{\alpha-1}}\right) + 1 \quad (\text{sử dụng (*)}) \\ &= v_p\left((x^{p^{\alpha-2}})^p - (y^{p^{\alpha-2}})^p\right) + 1 \\ &= v_p\left(x^{p^{\alpha-2}} - y^{p^{\alpha-2}}\right) + 2 \quad (\text{sử dụng (*) lần nữa}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \dots \\ &= v_p\left((x^{p^1}) - (y^{p^1})\right) + \alpha - 1 \\ &= v_p(x - y) + \alpha \quad (\text{sử dụng (*) lần nữa}) \\ &= v_p(x - y) + v_p(n). \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Định lý 2 (Định lý về số mũ đúng 2 (LTE)). Cho x, y là hai số nguyên và n là số nguyên dương lẻ. Xét p là số nguyên tố lẻ sao cho:

$$p \mid (x + y), \quad p \nmid x, \quad p \nmid y.$$

Khi đó, ta có

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n).$$

Chứng minh. Ý tưởng chứng minh hoàn toàn giống với cách ta làm cho định lý 1. $\square$

Định lý 3 (Định lý về số mũ đúng 3 (LTE) với $p = 2$). Cho x, y là hai số nguyên lẻ và $x - y : 4$. Khi đó, ta có

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n).$$

Chứng minh. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $v_2(n) = 0$, tức n lẻ. Khi đó:

$$\begin{aligned} v_2(x^n - y^n) &= v_2(x - y) + v_2(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}) = v_2(x - y), \\ &\text{vì } x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1} \text{ là số lẻ vì là tổng của } n \text{ số lẻ, } n \text{ lẻ.} \end{aligned}$$

- Nếu $v_2(n) = 1$, đặt $n = 2m$, m lẻ. Khi đó:

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x^m - y^m) + v_2(x^m + y^m) = v_2(x - y) + v_2(x + y).$$

Ở đây, lập luận dấu bằng cuối cùng là do mệnh đề 2 và 3. Mặt khác, ta lại có

$$x + y = (x - y) + 2y \equiv 2 \pmod{4}$$

nên $v_2(x + y) = 1$. Khi đó, ta có

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + 1 = v_2(x - y) + v_2(n).$$

• Nếu $v_2(n) = a$ thì $n = 2^a b$, b lẻ, $a \geq 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} v_2(x^n - y^n) &= v_2(x^{2^a b} - y^{2^a b}) \\ &= v_2\left((x^{2^a})^b - (y^{2^a})^b\right) \\ &= v_2(x^{2^a} - y^{2^a}) \quad (\text{theo mệnh đề 2}) \\ &= v_2\left[(x^{2^{a-1}} - y^{2^{a-1}}) \cdots (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)\right]. \end{aligned}$$

Vì $x^{2^m} + y^{2^m} \equiv 2 \pmod{4}$, $\forall m = \overline{2, a-1}$ nên ta có

$$v_2(x^{2^a} - y^{2^a}) = a + v_2(x - y) = v_2(x - y) + v_2(n).$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Định lý 4 (Định lý về số mũ đúng 4 LTE với $p = 2$). Cho x, y là hai số nguyên lẻ và n là số nguyên dương **chẵn**. Khi đó, ta có

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1.$$

Chứng minh. Vì x, y lẻ nên $4 \mid (x^2 - y^2)$. Do đó:

$$\begin{aligned} v_2(x^n - y^n) &= v_2\left((x^2)^{\frac{n}{2}} - (y^2)^{\frac{n}{2}}\right) \\ &= v_2(x^2 - y^2) + v_2\left(\frac{n}{2}\right) \\ &= v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Lỗi hay mắc phải khi sử dụng các công thức trên là không kiểm tra điều kiện $p \mid (x \pm y)$.

Ta có bảng tóm tắt dưới đây:

Định lý 5 (Định lý Legendre). Cho p là số nguyên tố và n là số nguyên dương. Khi đó, ta có

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots = \frac{n - s_p(n)}{p - 1},$$

với $s_p(n)$ là tổng tất cả các chữ số của n trong cơ số p , tức là khi $n = a_k p^k + \cdots + a_1 p + a_0$ thì:

$$s_p(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0.$$

n	$(p, n) = 1, (p, x) = 1, (p, y) = 1$	$p \mid (x - y)$	$\Rightarrow v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y)$
n lẻ	$(p, n) = 1, (p, x) = 1, (p, y) = 1$	$p \mid (x + y)$	$\Rightarrow v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y)$
	$p \geq 3, (p, x) = 1, (p, y) = 1$	$p \mid (x - y)$	$\Rightarrow v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$
n lẻ	$p \geq 3, (p, x) = 1, (p, y) = 1$	$p \mid (x + y)$	$\Rightarrow v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n)$
	$(2, x) = (2, y) = 1$	$4 \mid (x - y)$	$\Rightarrow v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n)$
n chẵn	$(2, x) = (2, y) = 1$	$2 \mid (x - y)$	$\Rightarrow v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1$

Chứng minh. Để chứng minh định lý này, ta cần đến các nhận xét sau đây:

Nhận xét 1. Nếu n là số tự nhiên thì $n[x] \leq [nx]$, trong đó x là số thực.

Thật vậy, đặt $[x] = a$, ta có $x = a + d$ với $0 \leq d < 1$. Khi đó ta có

$$[nx] = [n(a + d)] = na + [nd],$$

do na nguyên. Vì $nd \geq 0$ nên $[nd] \geq 0$. Suy ra $na = n[x] \leq [nx]$.

Nhận xét 2. Với mọi số tự nhiên n và q ($q \neq 0$), ta có $q \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \leq n$.

Thật vậy, theo nhận xét 1, ta có

$$q \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \leq \left\lfloor q \cdot \frac{n}{q} \right\rfloor = [n] = n.$$

Nhận xét 3. Với mọi số tự nhiên n và q ($q \neq 0$), ta có $n < q \left(1 + \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor\right)$.

Thật vậy, viết $n = mq + r$ với $0 \leq r < q$, ta có $\frac{n}{q} = m + \frac{r}{q}$ với $0 \leq \frac{r}{q} < 1$. Do đó:

$$\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor = m.$$

Mặt khác, từ $n = mq + r$, ta suy ra $n = (m + 1)q + r - q$ với $r - q$ là số âm nên:

$$n < (m + 1)q = \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right) q.$$

Nhận xét 4. Trong dãy n số tự nhiên $1, 2, 3, \dots, n$ chỉ có đúng $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ số tự nhiên chia hết cho số tự nhiên q khác 0.

Thật vậy, nếu $n < q$ thì $\frac{n}{q} < 1$, suy ra $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor = 0$. Rõ ràng trong dãy $1, 2, 3, \dots, n$ ($n < q$) không có số nào chia hết cho q .

Nếu $n = q$ thì $\frac{n}{q} = 1$. Trong dãy $1, 2, 3, \dots, n$ ($n = q$) có đúng một số chia hết cho q là số $n = q$.

Nếu $n > q$ thì $\frac{n}{q} > 1$, suy ra $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \geq 1$. Nhận thấy trong dãy số $1, 2, 3, \dots, q, q + 1, \dots, n$ chỉ có:

$$1 \cdot q, 2 \cdot q, 3 \cdot q, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \cdot q$$

là chia hết cho q . Thật vậy, theo nhận xét 2 thì $q \cdot \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \leq n$ nên số tự nhiên $q \cdot \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ chia hết cho q là một số hạng của dãy $1, 2, 3, \dots, n$.

Mặt khác theo nhận xét 3 thì $n < q \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)$ nên số $q \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right)$ không là số hạng của dãy $1, 2, 3, \dots, n$. Như vậy có đúng $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ số chia hết cho q .

Theo nhận xét 4, ta suy ra ngay kết quả: Trong dãy số tự nhiên $1, 2, 3, \dots, n$ có đúng $\left\lfloor \frac{n}{q^2} \right\rfloor$ số chia hết cho q^2 , có đúng $\left\lfloor \frac{n}{q^3} \right\rfloor$ số chia hết cho $q^3, \dots$

Quay trở lại với việc chứng minh định lý. Theo kết quả ở nhận xét 4: Số các nhân tử của tích $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ chia hết cho p

đúng bằng $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, số các nhân tử chia hết cho p^2 đúng bằng $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$, ... Điều này có nghĩa là số các thừa số nguyên tố p có trong phân tích ra thừa số nguyên tố của tích $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ đúng bằng $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Giả sử $n = a_k p^k + \cdots + a_1 p + a_0$ là biểu diễn của n trong cơ số p . Khi đó, với $0 \leq r < k$ thì:

$$\frac{n}{p^r} = a_k p^{k-r} + a_{k-1} p^{k-1-r} + \cdots + a_r + \frac{a_{r-1} p^{r-1} + \cdots + a_0}{p^r}.$$

Vì viết trong cơ số p nên $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, do đó:

$$\frac{a_{r-1} p^{r-1} + \cdots + a_0}{p^r} \leq \frac{(p-1)(p^{r-1} + p^{r-2} + \cdots + 1)}{p^r} = \frac{p^r - 1}{p^r} < 1,$$

suy ra

$$\left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor = a_k p^{k-r} + a_{k-1} p^{k-1-r} + \cdots + a_r.$$

Bây giờ quay trở lại $v_p(n!)$, ta có

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^{r-1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor \\ &= a_k p^{k-1} + a_{k-1} p^{k-2} + \cdots + a_2 p + a_1 \\ &\quad + a_k p^{k-2} + a_{k-1} p^{k-3} + \cdots + a_2 \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + a_k \\ &= a_1 + a_2(p+1) + a_3(p^2+p+1) + \cdots + a_k(p^{k-1} + \cdots + 1) \\ &= \frac{a_1(p-1) + a_2(p^2-1) + a_3(p^3-1) + \cdots + a_k(p^k-1)}{p-1} \\ &= \frac{(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots + a_k p^k) - (a_0 + a_1 + \cdots + a_k)}{p-1} \\ &= \frac{n - s_p(n)}{p-1}. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh xong. $\square$

2. Các bài toán ứng dụng

Bài tập 1. Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng không tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$x^p + y^p = p \cdot [(p-1)!]^p.$$

Chứng minh. Giả sử tồn tại x, y thỏa mãn đề bài. Nhận thấy trong $(p-1)! \nmid p$ nên:

$$[(p-1)!]^p \nmid p.$$

Từ đó suy ra:

$$p[(p-1)!]^p \nmid p^2. \quad (1)$$

- Nếu x chia hết cho p thì do $x^p + y^p$ chia hết cho p (vì về phải chia hết cho p) nên dẫn đến y cũng chia hết cho p . Vì p nguyên tố lẻ nên ta có $x^p : p^2$ và $y^p : p^2$, suy ra

$$(x^p + y^p) : p^2.$$

Đối chiếu với (1), ta thấy mâu thuẫn.

- Nếu $x \nmid p$, thì từ điều kiện bài toán suy ra $y \nmid p$. Theo định lý Fermat thì:

$$x^p + y^p \equiv x + y \pmod{p} \Rightarrow x + y \equiv 0 \pmod{p}.$$

Do đó theo định lý 2 thì:

$$v_p(x^p + y^p) = v_p(x + y) + v_p(p) \geq 1 + 1 = 2 \Rightarrow (x^p + y^p) : p^2,$$

lại mâu thuẫn với (1).

Vậy không tồn tại x, y thỏa mãn đề bài. $\square$

Bài tập 2. Chứng minh với mọi số nguyên tố p , không tồn tại $x, y \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$2^p + 3^p = x^{p+1}.$$

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra với $p = 2, 3, 5$ đều không thỏa mãn. Xét p nguyên tố lớn hơn 5. Giả sử tồn tại x, y thỏa đề bài. Khi đó $v_5(p) = 0$. Vì $2^p + 3^p : 5$ nên suy ra $x^{p+1} : 5$, do 5 nguyên tố nên $x : 5$. Vì y nguyên dương nên $y + 1 \geq 2$, hay $x^{y+1} : 5^2 = 25$. Tuy nhiên, ta lại có

$$v_5(2^p + 3^p) = v_5(2 + 3) + v_5(p) = v_5(5) + v_5(p) = 1.$$

Điều này dẫn đến:

$$2^p + 3^p \nmid 25,$$

mâu thuẫn với $x^{y+1} : 25$. Vậy ta có yêu cầu bài toán. $\square$

Bài tập 3 (Ấn Độ, 2002). Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn:

$$a \mid b^5, \quad b \mid c^5, \quad c \mid a^5.$$

Chứng minh rằng $abc \mid (a + b + c)^{31}$.

Chứng minh. Gọi p là một ước nguyên tố của abc . Khi đó hoặc $p \mid a$ hoặc $p \mid b$ hoặc $p \mid c$. Giả sử $p \mid a$, do $a \mid b^5$ nên $p \mid b^5$, tức ta có $p \mid b$. Tương tự ta cũng chứng minh được $p \mid c$. Vậy cả ba số a, b, c đều có p trong sự phân tích thành thừa số nguyên tố. Đặt:

$$v_p(a) = x, \quad v_p(b) = y, \quad v_p(c) = z.$$

Do tính đối xứng, không mất tính tổng quát, ta giả sử $x = \min\{x, y, z\}$. Ta cần chứng minh:

$$v_p((a + b + c)^{31}) \geq v_p(abc) \Leftrightarrow 31 \cdot v_p(a + b + c) \geq v_p(abc).$$

Ta có

$$\begin{aligned} a \mid b^5 &\Rightarrow v_p(a) \leq v_p(b^5) \Rightarrow v_p(a) \leq 5 \cdot v_p(b) \Rightarrow x \leq 5y, \\ b \mid c^5 &\Rightarrow v_p(b) \leq v_p(c^5) \Rightarrow v_p(b) \leq 5 \cdot v_p(c) \Rightarrow y \leq 5z, \\ c \mid a^5 &\Rightarrow v_p(c) \leq v_p(a^5) \Rightarrow v_p(c) \leq 5 \cdot v_p(a) \Rightarrow z \leq 5x. \end{aligned}$$

Do đó:

$$x + y + z \leq x + 5z + z = x + 6z \leq x + 6 \cdot 5x = 31x.$$

Với kết quả này, ta thu được:

$$\begin{aligned} v_p(a+b+c)^{31} &= 31 \cdot v_p(a+b+c) \\ &\geq 31 \cdot \min \{v_p(a), v_p(b), v_p(c)\} \\ &= 31 \cdot x \geq x+y+z = v_p(a) + v_p(b) + v_p(c) = v_p(abc). \end{aligned}$$

Từ đó có điều phải chứng minh. $\square$

Bài tập 4 (Nga, 1996). Cho các số nguyên dương a, b, p, n, k thỏa mãn:

$$a^n + b^n = p^k.$$

Chứng minh rằng nếu $n > 1$ là số lẻ và p là số nguyên tố lẻ thì n là lũy thừa của p .

Chứng minh. Nếu a chia hết cho p thì theo điều kiện bài toán suy ra b chia hết cho p . Khi đó chia a, b cho lũy thừa cao nhất của p trong chúng, ta lại đưa về bài toán trên. Do đó có thể giả sử a, b không chia hết cho p . Vì n lẻ nên:

$$(a+b)|(a^n+b^n).$$

Giả sử tồn tại ước nguyên tố q của $a+b$. Khi đó, q phải lẻ, vì nếu q chẵn thì $(a^n+b^n):2$, trong khi đó $p^k \nmid 2$. Khi đó theo định lý 2 thì:

$$v_q(p^k) = v_q(a^n+b^n) = v_q(a+b) + v_q(n).$$

Vì $q|(a+b)$ nên $v_q(a+b) \geq 1$, dẫn đến $v_q(p^k) \geq 1$, tức $q|p^k$ hay $q=p$. Do đó:

$$a+b=p^m.$$

Vì $n \geq 3$ nên $a^n+b^n > a+b$, do đó $k > m$ và ta được quan hệ:

$$k = m + v_p(n) \Rightarrow v_p(n) > 0.$$

Giả sử $v_p(n) = \alpha > 0$, tức $n = p^\alpha \beta$, $(\beta, p) = 1$. Khi đó:

$$p = v_p(p^k) = v_p(a^n+b^n) = v_p(a^{p^\alpha \beta} + b^{p^\alpha \beta}) = v_p(a^{p^\alpha} + b^{p^\alpha}).$$

Từ đó suy ra:

$$a^{p^\alpha} + b^{p^\alpha} \geq p^k = a^n + b^n.$$

Mặt khác, ta lại có

$$a^n + b^n \geq a^{p^\alpha} + b^{p^\alpha}.$$

Suy ra $\beta = 1$, do đó $n = p^{v_p(n)}$, điều phải chứng minh. $\square$

Bài tập 5 (Rumani, 2010). Cho số nguyên dương a và n sao cho tất cả các ước nguyên tố của a đều lớn hơn n . Chứng minh

$$(a-1)(a^2-1) \cdots (a^{n-1}-1)$$

chia hết cho $n!$.

Chứng minh. Vì tất cả các ước nguyên tố của a đều lớn hơn n nên $(a, n) = 1$. Gọi p là ước nguyên tố của $n!$. Khi đó ta cũng có $(a, p) = 1$. Theo định lý Fermat thì:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}, \quad \forall k \geq 1.$$

Ta luôn có

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1} \leq \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor.$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} v_p \left(\prod_{k=1}^{n-1} (a^k - 1) \right) &= \sum_{k=1}^{n-1} v_p(a^k - 1) \geq \sum_{k=1}^{k(p-1) \leq n} v_p[a^{k(p-1)} - 1] \\ &= \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor \geq v_p(n!). \end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài tập 6 (IMO, 1990). Xác định tất cả các số tự nhiên $n > 1$ sao cho $2^n + 1$ chia hết cho n^2 .

Lời giải. Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n . Khi đó $(2^n+1):p$ nên p lẻ, dẫn đến:

$$2^{2n} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Theo định lý Fermat thì:

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Từ đây, ta có

$$2^{(2n, p-1)} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Vì p nhỏ nhất nên $(n, p-1) = 1$, dẫn đến $(2n, p-1) = (2, p-1) = 2$, tức là $2^2 \equiv 1 \pmod{p}$, suy ra $p = 3$. Đặt $n = 3^\alpha \cdot k$ (k lẻ, $(k, 3) = 1$). Khi đó:

$$\begin{aligned} v_3(2^n + 1) &\geq v_3(n^2) \Rightarrow v_3(2 + 1) + v_3(n) \geq 2\alpha \\ &\Rightarrow 1 + \alpha \geq 2\alpha \\ &\Rightarrow \alpha = 1 \\ &\Rightarrow n = 3k. \end{aligned}$$

Nếu $k > 1$, gọi q là ước nguyên tố nhỏ nhất của k ($q \geq 5$). Suy ra:

$$2^{3k} \equiv -1 \pmod{q} \Rightarrow 2^{6k} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow 2^{(6k, q-1)} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Vì $(k, q-1) = 1$ nên $(6k, q-1) = 1$ (loại) hoặc $(6k, q-1) = 2$ hoặc $(6k, q-1) = 3$ (loại) hoặc $(6k, q-1) = 6$. Với $(6k, q-1) = 2$ thì:

$$2^2 \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow q = 3 \text{ (loại)}.$$

Với $(6k, q-1) = 6$, ta có

$$2^6 \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow q = 3 \text{ (loại) hoặc } q = 7.$$

Dẫn đến $8^k \equiv -1 \pmod{7}$ (vô lý). Vậy $k = 1$, tức $n = 3$ là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu. $\square$

Bài tập 7. Cho a, b, c là ba số nguyên dương thỏa mãn điều kiện:

$$c(ac + 1)^2 = (2c + b)(3c + b).$$

Chứng minh rằng c là số chính phương.

Chứng minh. Từ điều kiện bài toán thì:

$$c(ac + 1)^2 = 6c^2 + 5bc + b^2 \Rightarrow b^2 : c.$$

Gọi p là ước nguyên tố tùy ý của c thì ta có

$$b^2 : c \Rightarrow v_p(b^2) \geq v_p(c) \Rightarrow 2 \cdot v_p(b) \geq v_p(c).$$

Giả sử $v_p(b) \geq v_p(c)$. Khi đó do $(ac + 1, c) = 1$ nên $v_p(ac + 1) = 0$. Do đó:

$$\begin{aligned} v_p(c) &= v_p(2c + b) + v_p(3c + b) \geq v_p(c) + v_p(c) \\ &\Rightarrow v_p(c) \geq 2 \cdot v_p(c) \text{ (vô lý)}. \end{aligned}$$

Vậy $v_p(b) < v_p(c)$ và như thế ta có

$$v_p(c) = v_p(2c + b) + v_p(3c + b) \geq v_p(b) + v_p(b) \Rightarrow v_p(c) \geq 2 \cdot v_p(b).$$

Mà $2v_p(b) \geq v_p(c)$ nên ta suy ra $v_p(c) = 2 \cdot v_p(b)$. Điều này chứng tỏ mọi lũy thừa nguyên tố của p trong c đều là số chẵn, tức c là số chính phương. $\square$

Bài tập 8. Cho a và b là các số nguyên dương sao cho:

$$a \mid b^2, \quad b^3 \mid a^4, \quad a^5 \mid b^6, \quad b^7 \mid a^8, \quad \dots$$

Chứng minh rằng $a = b$.

Chứng minh. Từ điều kiện bài toán suy ra p là ước nguyên tố của a khi và chỉ khi p là ước nguyên tố của b . Ta chứng minh:

$$v_p(a) = v_p(b).$$

Từ giả thiết thì $a^{4k+1} \mid b^{4k+2}, b^{4k+3} \mid a^{4k+4}$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} v_p(a^{4k+1}) &\leq v_p(b^{4k+2}) \Rightarrow (4k+1)v_p(a) \leq (4k+2)v_p(b) \\ &\Rightarrow \frac{v_p(a)}{v_p(b)} \leq \frac{4k+2}{4k+1} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} v_p(b^{4k+3}) &\leq v_p(a^{4k+4}) \Rightarrow (4k+3)v_p(b) \leq (4k+4)v_p(a) \\ &\Rightarrow \frac{v_p(a)}{v_p(b)} \geq \frac{4k+3}{4k+4}. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra:

$$\frac{4k+3}{4k+4} \leq \frac{v_p(a)}{v_p(b)} \leq \frac{4k+2}{4k+1}.$$

Cho $k \rightarrow \infty$, ta được $v_p(a) = v_p(b)$. Từ đó suy ra $a = b$. $\square$

Bài tập 9. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta đều có

$$n! \mid \prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k).$$

Chứng minh. Lấy p là một số nguyên tố. Ta có thể giả sử $p \leq n$.

Đầu tiên ta kiểm tra với $p = 2$. Ta có

$$v_2(n!) = n - s_2(n) \leq n - 1,$$

ngoài ra:

$$v_2 \left(\prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} v_2(2^n - 2^k) \geq n - 1,$$

vì $2^n - 2^k$ là số chẵn với mọi $k \geq 1$. Bây giờ, giả sử $p > 2$, theo định lý Fermat ta có

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 2^{k(p-1)} - 1 \vdots p, \quad k \geq 1.$$

Vì $\prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^n (2^k - 1)$ nên ta có

$$v_2 \left(\prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) \right) = \sum_{k=1}^n v_p(2^k - 1) \geq \sum_{1 \leq k(p-1) \leq n} v_2(2^{k(p-1)} - 1) \geq |k| \cdot 1 \leq k(k-1) \leq n|,$$

bởi vì $|k| \cdot 1 \leq k(p-1) \leq n| = \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor$. Nhưng do:

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1} \leq \frac{n-1}{p-1} < \frac{n}{p-1}$$

và $v_p(n!) \in \mathbb{Z}$ nên ta phải có

$$v_p(n!) \leq \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor.$$

Từ các tính toán trên, ta suy ra:

$$v_p \left(\prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) \right) \geq v_p(n!).$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Bài tập 10. Chứng minh rằng tích số của tất cả các số nguyên từ $2^{1917} + 1$ đến $2^{1991} - 1$ không thể là số chính phương.

Chứng minh. Đặt:

$$(2^{1917} + 1)(2^{1917} + 2) \cdots (2^{1991} - 1) = \frac{(2^{1991} - 1)!}{(2^{1917} + 1)!} = A.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} v_2(A) &= v_2((2^{1991} - 1)!) - v_2((2^{1917} + 1)!) \\ &= \left\lfloor \frac{2^{1991} - 1}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{1991} - 1}{2^{1990}} \right\rfloor \\ &\quad - \left\lfloor \frac{2^{1917} + 1}{2} \right\rfloor - \cdots - \left\lfloor \frac{2^{1917} + 1}{2^{1917}} \right\rfloor \\ &= (2^{1990} - 1 + 2^{1989} - 1 + \cdots + 2^1 - 1) \\ &\quad - (2^{1916} + 2^{1915} + \cdots + 2 + 1) \\ &= 2(2^{1989} + 2^{1988} + \cdots + 1) - 1990 \\ &\quad - (2^{1916} + 2^{1915} + \cdots + 2 + 1) \\ &= 2 \cdot \frac{2^{1990} - 1}{2 - 1} - 1990 - \frac{2^{1917} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{1991} - 2 - 1990 - 2^{1917} + 1 \\ &= 2^{1991} - 2^{1917} - 1990 - 1. \end{aligned}$$

Từ trên ta thấy $v_2(A) \not\equiv 0 \pmod{2}$. Từ đó suy ra A không thể là số chính phương. $\square$

Bài tập 11. Chứng minh rằng

$$(n+1)[C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n] = [1, 2, \dots, n, n+1], \quad (1)$$

ở đây $[a, b]$ ký hiệu là bội chung nhỏ nhất của hai số a và b .

Chứng minh. Ta cần lưu ý là nếu $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ và $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$ thì:

$$[a, b] = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdots p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}$$

và

$$[ma, mb] = m \cdot [a, b].$$

Đặt $a_k = (n+1) \cdot C_n^k$. Khi đó vế trái của (1) là $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$. Ký hiệu VP và VT tương ứng là vế phải và vế trái của (1). Lấy p là số nguyên tố $\leq n+1$. Lấy r nguyên dương thỏa mãn:

$$p^r \leq n+1 < p^{r+1}.$$

Khi đó $v_p(VP)\alpha = r$. Ta cần chứng minh:

$$v_p(VT) = r.$$

Điều này tương đương với việc kiểm chứng hai điều sau đây:

$$\bullet p^{r+1} \nmid a_k, \forall k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

$$\bullet p^r \mid a_{k_0} \text{ với một } k_0 \text{ nào đó thuộc một trong các giá trị}$$

$$0, 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Để chứng minh (2), ta cần chứng minh khẳng định: Nếu $p^r \leq m < p^{r+1}$ thì:

$$p^{r+1} \nmid C_m^k, \quad \forall 0 \leq k \leq m. \quad (4)$$

Thật vậy, ta có

$$v_p(C_m^k) = \sum_{s=1}^r \left(\left\lfloor \frac{m}{p^s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-k}{p^s} \right\rfloor \right).$$

Sử dụng kết quả $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ thì:

$$\left\lfloor \frac{m-k}{p^s} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p^s} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{m}{p^s} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m-k}{p^s} + \frac{k}{p^s} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{m-k}{p^s} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p^s} \right\rfloor + 1.$$

Khi đó:

$$0 \leq \left\lfloor \frac{m}{p^s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-k}{p^s} \right\rfloor \leq 1.$$

Từ đó suy ra:

$$v_p(C_m^k) \leq \sum_{s=1}^r 1 = r.$$

Từ đó (4) được chứng minh. Bây giờ, ta có để ý rằng:

$$a_k = (n+1)C_n^k = (n-k+1)C_{n+1}^k = (k+1)C_{n+1}^{k+1}.$$

Khi đó, theo (4) thì p^{r+1} không là ước của bất kỳ số nào trong các số $C_n^k, C_{n+1}^k, C_{n+1}^{k+1}$. Do đó p^{r+1} là ước của a_k nếu và chỉ nếu p là ước của mỗi số $n+1, n-k+1, k+1$. Điều này suy ra p chia hết $(n+1) - (n-k+1) - (k+1) = -1$, mâu thuẫn. Vậy (2) được chứng minh.

Để chứng tỏ (3) ta chọn $k_0 = p^r - 1$. Khi đó:

$$k_0 = p^r - 1 \leq n$$

và

$$a_{k_0} = (n+1)C_n^{k_0} = (k_0+1)C_{n+1}^{k_0+1} = p^r \cdot C_{n+1}^{k_0+1} : p^r,$$

tức (3) được chứng minh. Bài toán được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Bài tập 12 (Iran, 2013). *Tồn tại hay không các số nguyên dương a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho $2013(ab + bc + ca)$?*

Lời giải. Trước tiên, ta cần chứng minh bổ đề sau: Nếu $(x+y+z)^2 = (3m+2)(xy+yz+zx)$, $p = 3n+2$ là ước nguyên tố của $3m+2$, $v_p(3m+2)$ lẻ thì p là ước của x , của y và của z .

Chứng minh. Vì mỗi số dạng $3m+2$ luôn có ước nguyên tố dạng $3n+2$. Mặt khác, trong các ước nguyên tố dạng $3n+2$ của $3m+2$, luôn tồn tại một ước nguyên tố p mà $v_p(3m+2)$ lẻ (vì nếu không thì số dạng $3m+2$ lại có dạng $3m+1$).

Đặt $3m+2 = kp^\alpha$ ($\alpha \geq 1$, α lẻ, $(k, p) = 1$). Khi đó, ta có

$$(x+y+z)^2 : kp^\alpha \Rightarrow v_p((x+y+z)^2) \geq v_p(kp^\alpha) \Rightarrow 2 \cdot v_p(x+y+z) \geq \alpha.$$

Do α lẻ nên ta suy ra:

$$2 \cdot v_p(x+y+z) > \alpha.$$

Mặt khác, ta lại có

$$2v_p(x+y+z) = v_p(kp^\alpha) + v_p(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow v_p(xy+yz+zx) > 0$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx : p.$$

Mà $(x + y + z)^2 : p$ nên kết hợp với trên, ta được $x^2 + y^2 + z^2 : p$ và $p \mid (x + y + z)$. Ta có

$$\begin{aligned} p \mid (xy + yz + zx) &\Rightarrow p \mid [xy + z(y + z + x) - z^2] \\ &\Rightarrow p \mid (xy - z^2) \\ &\Rightarrow p \mid (x^2 + xy + z^2). \end{aligned}$$

Giả sử $p \nmid x \Rightarrow p \nmid y$. Theo định lý Fermat thì:

$$x^{p-1} \equiv y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x^{3n+1} \equiv y^{3n+1} \pmod{p}.$$

Lại vì $x^3 \equiv y^3 \pmod{p} \Rightarrow x^{3n} \equiv y^{3n} \pmod{p}$. Do đó:

$$x^{(3n+1, 3n)} \equiv y^{(3n+1, 3n)} \pmod{p} \Rightarrow x \equiv y \pmod{p}.$$

Từ đây suy ra:

$$3x^2 \equiv x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{p},$$

mâu thuẫn. Vậy $p \mid x, p \mid y, p \mid z$. ■

Quay trở lại bài toán. Giả sử $(a^2 + b^2 + c^2) : 2013(ab + bc + ca)$, thế thì ta có

$$(a + b + c)^2 = (3k + 2)(ab + bc + ca).$$

Gọi $p = 3k_1 + 2$ là ước nguyên tố của $3k + 2$ mà $v_p(3k + 2)$ lẻ. Theo bổ đề trên thì:

$$p \mid a, \quad p \mid b, \quad p \mid c.$$

Giả sử $v_p(a) \geq v_p(b) \geq v_p(c)$. Nếu $v_p(a) > v_p(b), v_p(b) > v_p(c)$ thì ta có

$$v_p(a^2 + b^2 + c^2) = 2v_p(c), \quad v_p(ab + bc + ca) = v_p(bc) = v_p(b) + v_p(c).$$

Suy ra:

$$v_p(ab + bc + ca) > v_p(a^2 + b^2 + c^2),$$

vô lý vì $(ab + bc + ca) \mid (a^2 + b^2 + c^2)$. Vậy $v_p(a) = v_p(b) = v_p(c)$. Bây giờ, đặt:

$$a = a_1 p^\beta, \quad b = b_1 p^\beta, \quad c = c_1 p^\beta, \quad ((a_1, p) = (b_1, p) = (c_1, p) = 1).$$

Khi đó, ta có

$$(a_1 p^\beta + b_1 p^\beta + c_1 p^\beta)^2 = (3n + 2)(a_1 b_1 p^{2\beta} + b_1 c_1 p^{2\beta} + c_1 a_1 p^{2\beta}).$$

Suy ra

$$(a_1 + b_1 + c_1)^2 = (3n + 2)(a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 a_1).$$

Lại áp dụng bổ đề trên suy ra:

$$p \mid a_1, \quad p \mid b_1, \quad p \mid c_1,$$

mâu thuẫn. Vậy không tồn tại các số a, b, c thỏa mãn đề bài. □

Bài tập 13 (Rumani, 2004). Cho m là số nguyên dương ≥ 2 . Một số nguyên dương n được gọi là một số m -tốt nếu với mọi số nguyên dương a , nguyên tố cùng nhau với n , thì $n \mid (a^m - 1)$. Chứng minh rằng bất cứ một số m -tốt nào đều không vượt quá $4m(2^m - 1)$.

Chứng minh. Xét m là số lẻ. Gọi n là một số m -tốt tùy ý. Khi đó chọn $a = n - 1$ thì rõ ràng $(a, n) = (n, n - 1) = 1$ và ta có

$$n \mid [(n - 1)^m - 1] \Rightarrow (n - 1)^m \equiv 1 \pmod{n}.$$

Nhưng vì m lẻ nên:

$$(n - 1)^m - 1 \equiv (-1)^m - 1 = -2 \pmod{n}.$$

Từ đó suy ra $n \mid 2 \Rightarrow n \leq 2$. Vậy kết luận bài toán đúng trong trường hợp này.

Xét m là số chẵn. Khi đó $m = 2^t q, t \geq 1, (q, 2) = 1, t, q \in \mathbb{N}$. Xét n là một số m -tốt tùy ý. Khi đó n luôn được biểu diễn dưới dạng $n = 2^u(2v + 1), u \geq 0$. Ta sẽ thực hiện hai công đoạn:

- **Đánh giá chặn trên cho $2v + 1$.** Chọn số $a = 2v - 1$, khi đó $(a, n) = 1$. Theo định nghĩa của số m -tốt, ta có

$$\begin{aligned} a^m \equiv 1 \pmod{n} &\Rightarrow (a^m - 1) : n : (2v + 1) \\ &\Rightarrow [(2v - 1) + 2]^m \equiv 1 \pmod{2v + 1}, \end{aligned}$$

suy ra $2^m \equiv 1 \pmod{2v + 1}$. Từ đây, ta có $2^m - 1 \geq 2v + 1$.

- **Đánh giá chặn trên cho 2^u .** Chọn số $a = 8v + 5$, khi đó $(a, n) = 1$. Theo định nghĩa của số m -tốt, ta có

$$a^m - 1 \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow v_2(a^m - 1) = v_2(a - 1) + v_2(a + 1) + v_2(m) - 1.$$

Như vậy, ta có $v_2(a^m - 1) = 2 + 1 + t - 1 = t + 2$. Do $a^m \equiv 1 \pmod{n}$, và $v_2(n) = u$ nên $t + 2 \geq u$. Do đó:

$$2^{t+2} \geq 2^u \Rightarrow 4 \cdot 2^t \geq 2^u.$$

Do $2^t q \geq 2^t$, nên kết hợp với điều trên suy ra

$$4 \cdot 2^t q \geq 2^u \Rightarrow 2^u \leq 4m.$$

Kết hợp hai đánh giá trên ta được $n = 2^u(2v + 1) \leq 4m(2^m - 1)$. $\square$

Bài tập 14. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2^n \mid (3^n - 1)$.

Lời giải. Nhận thấy $n = 1$ thỏa. Xét $n > 1$. Nếu n lẻ, đặt $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Khi đó:

$$3^n - 1 = 3 \cdot 9^k - 1 = 3 \cdot (9^k - 1) + 2 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Nhưng $2^n \equiv 0 \pmod{4}$, do đó $2^n \nmid 3^n - 1$. Vậy n phải là số chẵn. Vì $2^n \mid (3^n - 1)$ nên:

$$\begin{aligned} v_2(2^n) &\leq v_2(3^n - 1) \Rightarrow n \leq v_2(3 - 1) + v_2(3 + 1) + v_2(n) - 1 \\ &\Rightarrow n - 2 \leq v_2(n) \\ &\Rightarrow 2^{n-2} \leq n. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Kiểm tra trực tiếp, ta nhận $n \in \{1, 2, 4\}$. $\square$

Bài tập 15. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho $b^a \mid (a^b - 1)$.

Lời giải. Nếu b lẻ, gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của b . Đặt $b = p^\alpha \beta$ với $(p, \beta) = 1$. Vì $b^a \mid (a^b - 1)$ nên ta có $p \mid (a^b - 1)$. Mặt khác, theo định lý Fermat thì:

$$p \mid (a^{p-1} - 1).$$

Như vậy, ta có

$$p \mid (a^{(b, p-1)} - 1).$$

Vì $(b, p-1) = 1$ nên ta suy ra $p \mid (a-1)$. Đặt $a-1 = p^x y$, $(y, p) = 1$. Khi đó, ta có

$$v_p(b^a) \leq v_p(a^b - 1) \Rightarrow a\alpha \leq v_p(a-1) + v_p(b) \Rightarrow a\alpha \leq v_p(a-1) + \alpha,$$

suy ra $(a-1)\alpha \leq x \Rightarrow p^{(a-1)\alpha} \leq p^x \leq a-1$ (vô lý). Do đó b là số chẵn. Đặt $b = 2^m n$, $(n, 2) = 1$. Khi đó, lại do $b^a \mid (a^b - 1)$ nên ta có

$$\begin{aligned} v_2(b^2) &\leq v_2(a^b - 1) \Rightarrow am \leq v_2(a-1) + v_2(a+1) + v_2(b) - 1 \\ &\Rightarrow am \leq v_2(a^2 - 1) + m - 1. \end{aligned}$$

Kết quả này cho ta:

$$(a-1)m \leq v_2(a^2 - 1) \Rightarrow 2^{(a-1)m+1} \leq a^2 - 1.$$

Từ đó suy ra $a-1 = 1$ hoặc $a-1 = 2$ hoặc $a-1 = 3$. Ta chỉ nhận $a = 3$. Với giá trị này của a , ta tính được ngay $b = 2$. $\square$

Bài tập 16 (Rumani, 2005). Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$3^x = 2^x y + 1.$$

Lời giải. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$3^x - 1 = 2^x y.$$

Nếu $x = 1$ thì $y = 1$. Xét $x > 1$. Nếu x lẻ thì:

$$3^x - 1 \equiv -1 - 1 = -2 \pmod{4},$$

trong khi đó $2^x y \equiv 0 \pmod{4}$, vô lý. Vậy x phải là số chẵn. Khi đó ta có

$$v_2(3^x - 1) = v_2(3 - 1) + v_2(3 + 1) + v_2(x) - 1 = 2 + v_2(x),$$

hay

$$x - 2 = v_2(x) \Rightarrow x : 2^{x-2} \Rightarrow x \geq 2^{x-2}.$$

Điều này chỉ có thể xảy ra khi $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Từ đó, ta tìm được các nghiệm (x, y) của phương trình là $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 5)$. $\square$

Bài tập 17 (VMO, 1995). Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho:

$$(1994!)^{1995} : 1995^k.$$

Lời giải. Ta có $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ nên:

$$1995^k = 3^k \cdot 5^k \cdot 7^k \cdot 19^k.$$

Với n nguyên dương tùy ý, ta luôn có

$$v_3(n!) \geq v_5(n!) \geq v_7(n!) \geq v_{19}(n!).$$

Vậy để tìm k , ta chỉ cần tính $v_{19}(n!)$. Ta có

$$v_{19}(1994!) = \left\lfloor \frac{1994}{19} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1994}{19^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1994}{19^3} \right\rfloor = 109.$$

Khi đó:

$$v_{19}((1994!)^{1995}) = 109 \cdot 1995.$$

Từ đó suy ra số nguyên dương k lớn nhất là $k = 109 \cdot 1995 = 217455$. $\square$

Bài tập 18 (Dự tuyển IMO, 1995). Cho a, b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$n! \mid a(a+b)(a+2b) \cdots [a+(n-1)b]b^{n-1}.$$

Chứng minh. Gọi p là một ước nguyên tố bất kỳ của $n!$. Nếu $p \mid b$ thì $b^{n-1} : p^{n-1}$. Mặt khác:

$$v_p(n!) \leq n-1 \Rightarrow v_p(VP) \geq v_p(n!),$$

nên trong trường hợp này, ta có điều phải chứng minh.

Nếu $(b, p) = 1$, khi đó trong dãy $\{1, 2, \dots, n-1\}$ có ít nhất là $\left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor$ hệ thặng dư đầy đủ modulo p . Từ đó suy ra có ít nhất $\left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor$ số trong dãy $\{1, 2, \dots, n-1\}$ đồng dư với $-a$ theo modulo p . Từ đây, ta có

$$a(a+b)(a+2b) \cdots [a+(n-1)b]b^{n-1} : p^{\left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor},$$

hay

$$v_p(a(a+b)(a+2b) \cdots [a+(n-1)b]b^{n-1}) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor \geq v_p(n!).$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài tập 19. Cho n là số nguyên dương lẻ lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$\left[\frac{(n-1)^n + 1}{n} \right]^3 \mid \frac{(n-1)^{(n-1)^{n+1}+1} + 1}{n}.$$

Chứng minh. Gọi p là ước nguyên tố bất kỳ của $(n-1)^n + 1$. Vì $(n-1)^n + 1$ là số lẻ nên p lẻ. Lại do n lẻ nên $[(n-1)^n + 1] : n$. Áp dụng kết quả trên ta được:

$$[(n-1)^{(n-1)^{n+1}+1} + 1] : [(n-1)^n + 1].$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} v_p \left[(n-1)^{(n-1)^{n+1}+1} + 1 \right] &= v_p((n-1)^n + 1) + v_p \left(\frac{(n-1)^{(n-1)^{n+1}+1} + 1}{n} \right) \\ &= v_p((n-1)^n + 1) + v_p((n-1)^{(n-1)^{n+1}+1} + 1) - v_p(n) \\ &= v_p((n-1)^n + 1) + v_p((n-1)^n + 1) + v_p \left(\frac{(n-1)^n + 1}{n} \right) - v_p(n) \\ &= 3 \cdot v_p((n-1)^n + 1) - 2 \cdot v_p(n). \end{aligned}$$

Suy ra:

$$v_p \left(\left[\frac{(n-1)^n + 1}{n} \right]^3 \right) = v_p \left(\frac{(n-1)^{(n-1)^{n+1}+1} + 1}{n} \right).$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài tập 20. Cho a, b, c là ba số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$(a, b, c)^2 \mid (a, b) \times (b, c) \times (c, a),$$

trong đó (x, y) ký hiệu là ước chung lớn nhất của hai số x và y .

Chứng minh. Gọi p là một số nguyên tố tùy ý. Đặt $x = v_p(a)$, $y = v_p(b)$ và $z = v_p(c)$. Ta có

$$v_p((a, b, c)^2) = 2 \max\{x, y, z\}$$

và

$$v_p((a, b) \times (b, c) \times (c, a)) = \max\{x, y\} + \max\{y, z\} + \max\{z, x\}.$$

Bài toán tương đương với việc chứng minh:

$$\max\{x, y\} + \max\{y, z\} + \max\{z, x\} \geq 2 \max\{x, y, z\}.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó, ta cần chứng minh:

$$2x + y \geq 2x.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh. $\square$

Bài tập 21 (Dự tuyển IMO, 1991). *Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho:*

$$1991^k \mid (1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}).$$

Lời giải. Gọi p là một ước nguyên tố của 1991. Vì $1991 = 11 \cdot 181$ nên $p = 11$ hoặc $p = 181$ và $v_p(1991) = 1$. Mặt khác:

$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}} = 1990^{1991^{1992}} + 1 + 1992^{1991^{1990}} - 1.$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} v_p(1990^{1991^{1992}} + 1) &= v_p(1990 + 1) + v_p(1991^{1992}) \\ &= 1993 \cdot v_p(1991) = 1993 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} v_p(1992^{1991^{1990}} - 1) &= v_p(1992 - 1) + v_p(1991^{1990}) \\ &= 1991 \cdot v_p(1991) = 1991. \end{aligned}$$

Với các kết quả trên, ta thu được:

$$\begin{aligned} &v_p(1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}) \\ &= v_p(1990^{1991^{1992}} + 1 + 1992^{1991^{1990}} - 1) \\ &= \min\{v_p(1990^{1991^{1992}} + 1), v_p(1992^{1991^{1990}} - 1)\} \\ &= 1991. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra số nguyên dương k lớn nhất là 1991. $\square$

Bài tập 22 (IMO, 1999). *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, p) , với p là số nguyên tố thỏa mãn $x \leq 2p$ và x^{p-1} là ước số của $(p-1)^x + 1$.*

Lời giải. Nếu $p = 2$ suy ra $x \mid 2$. Do đó, hoặc $x = 2$ hoặc $x = 1$.

Nếu $p \geq 3$ thì $(p-1)^x + 1$ lẻ nên x lẻ. Nếu $p \nmid x$ thì $p \mid (x^{p-1} - 1)$ và $p \mid ((p-1)^x + 1)$, suy ra

$$p \mid (x^{p-1} - 1, (p-1)^x + 1).$$

Mà $x^{p-1} \mid ((p-1)^x + 1)$ nên $(x^{p-1} - 1, (p-1)^x + 1) = 1 \Rightarrow p \mid 1$, vô lý. Vậy $p \mid x$ và khi đó:

$$v_p(x^{p-1}) \leq v_p((p-1)^x + 1).$$

Vì $x \leq 2p < p^2$ nên $v_p(x) = 1$, dẫn đến $v_p(x^{p-1}) = p-1$. Do đó:

$$p-1 \leq v_p((p-1)^x + 1) = v_p(p) + v_p(x) \Rightarrow p-1 \leq 1+1 \Rightarrow p=3.$$

Từ đó dẫn đến $x = 3$. Vậy các cặp (x, p) là $(3, 3), (2, 2), (2, 1)$. $\square$

3. Một số bài tập tự luyện

Bài toán 1 (Kazakhstan, 2012). *Cho dãy (a_n) với $a_1 = 4, a_2 = 17$ và với mọi $k \geq 1$ thì:*

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= a_2 + a_4 + \dots + a_{2k} + (k+1)(2^{2k+3} - 1), \\ a_{2k+2} &= (2^{2k+2} + 1)a_1 + (2^{2k+3} + 1)a_3 + \dots + (2^{3k+1} + 1)a_{2k-1} + k. \end{aligned}$$

Tìm số nguyên dương m nhỏ nhất sao cho:

$$\left[(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^{2012^{2012}} - 1 \right] : 2^{2012^{2012}}.$$

Bài toán 2. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (k, m, n) sao cho $k^m \mid (m^n - 1)$ và $k^n \mid (n^m - 1)$.

Bài toán 3 (Iran, 2011). Cho k là số nguyên dương và $k \geq 7$. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) với $0 \leq x, y < 2^k$ thỏa mãn phương trình:

$$73^{73^x} \equiv 9^{9^y} \pmod{2^k}?$$

Bài toán 4 (Moldova, 2013). Cho $y \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên tố p thỏa mãn $4 \mid (p + 1)$ và p là ước số của một số có dạng $2^ny + 1$ (với n là số nguyên dương).

Bài toán 5 (Mỹ, 1972). Chứng minh đồng nhất thức sau với a, b, c là ba số nguyên dương:

$$\frac{[a, b, c]^2}{[a, b] \cdot [b, c] \cdot [c, a]} = \frac{(a, b, c)^2}{(a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a)}.$$

Ở đây (x, y) , $[x, y]$ lần lượt là ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của hai số x và y .

Bài toán 6 (Rumani, 2000). Cho số nguyên dương $a > 1$. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ nhỏ nhất sao cho:

$$2^{2000} \mid (a^n - 1).$$

Bài toán 7 (Pháp, 2012). Cho số nguyên tố p . Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho:

$$a^p + b^p = p^c.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Văn Quốc, Một số bài toán số học liên quan đến lũy thừa, Tài liệu tập huấn chuyên môn, hè 2012.
[2] Amir Hossein Parvardi, Lifting The Exponent Lemma (LTE).
[3] Diễn đàn AoPS.

BẤT BIẾN VÀ NỬA BẤT BIẾN TRONG CÁC BÀI TOÁN TRÒ CHƠI

Nguyễn Thành Khang†

Khi chúng ta xem xét một quá trình có cách thức biến đổi lặp đi lặp lại, chúng ta hãy cố gắng tìm ra một đại lượng không bao giờ thay đổi (gọi là **bất biến**).

Các bất biến quen thuộc trong các bài toán thi Olympic là tính chẵn lẻ, phép lấy modulo, lấy tổng, tính đối xứng của các đại lượng...

Trong một số bài toán khác, chúng ta chỉ có thể tìm ra các đại lượng luôn thay đổi theo một hướng xác định (gọi là **nửa bất biến**). Các đại lượng này cũng khá hữu ích trong các bài toán tổ hợp nói chung và đặc biệt là trong các bài toán trò chơi nói riêng. Bởi lẽ các bài toán trò chơi thường có một vị trí kết thúc, và cần một đại lượng nửa bất biến để chúng ta có thể khẳng định trò chơi sẽ đạt đến vị trí kết thúc sau hữu hạn bước.

1. Các bài toán một người chơi

Các bài toán có một người chơi xuất hiện không nhiều trong các kỳ thi Olympic. Các bài toán dạng này thường được giải quyết bằng cách tìm ra một đại lượng bất biến hoặc đại lượng nửa bất biến và so sánh đại lượng đó ở vị trí ban đầu và vị trí kết thúc.

Bài toán 1. Có 2012 quả cầu màu vàng chứa trong một hộp. Ta giả thiết thêm là có đủ số các quả vàng, đỏ, xanh ở bên ngoài hộp để thực hiện được các động tác sau đây nhiều lần:

- Thay hai quả cầu vàng bằng một quả cầu xanh.

†Sinh viên Đại học Ngoại thương Hà Nội.

- Thay hai quả cầu đỏ bằng một quả cầu xanh.
- Thay hai quả cầu xanh bằng một quả cầu vàng và một quả cầu đỏ.
- Thay một quả cầu vàng và một quả cầu xanh bằng một quả cầu đỏ.
- Thay một quả cầu xanh và một quả cầu đỏ bằng một quả cầu vàng.

(a) Mỗi nước đi là một lần thực hiện một cách tùy ý một trong năm động tác kể trên. Giả sử rằng sau một số hữu hạn các nước đi, trong hộp đã cho còn lại ba quả cầu. Chứng minh rằng có ít nhất một quả cầu xanh.

(b) Có chiến lược nào để sau hữu hạn các nước đi, chỉ còn lại một quả cầu trong hộp?

Lời giải. Tại thời điểm nào đó, ta giả sử trong hộp có x quả cầu vàng, y quả cầu xanh, z quả cầu đỏ. Ta đặt $T = x + 2y + 3z$. Rõ ràng là, sau mỗi nước đi, T giảm đi một bội của 4 hoặc không đổi. Ở thời điểm ban đầu, $x = 2012$, $y = 0$, $z = 0$ và $T = 2012$.

(a) Xét thời điểm sau cùng, khi đó, $x + y + z = 3$ và T là một bội của 4. Nếu giả sử ngược lại rằng trong số ba quả cầu này không có một quả cầu xanh nào, thì $y = 0$, suy ra $x + z = 3$, và $T = x + 3(3 - x) = 9 - 2x$, không thể chia hết cho 4 được.

(b) Giả sử rằng tại thời điểm sau cùng, còn duy nhất một quả cầu trong hộp. Khi đó, $x + y + z = 1$ và $T = x + 2y + 3z$ chia hết cho 4, điều này không thể xảy ra. $\square$

Bài toán 2. Peter tiến hành chơi một trò chơi với cái cân đĩa như sau: Tại bước thứ n , Peter đặt một quả cân có trọng lượng n^2 lên một trong hai đĩa cân.

(a) Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{N}$, Peter có thể đặt các quả cân sau hữu hạn bước để chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là k .

(b) Tìm số bước nhỏ nhất cần thực hiện để chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là 2010.

Lời giải. (a) Ta có đẳng thức sau

$$n^2 + (n + 3)^2 - (n + 1)^2 - (n + 2)^2 = 4.$$

Nếu sau $n - 1$ bước ta nhận được chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là k thì ta có thể đặt các quả cân trong các bước tiếp theo để sau $n + 3$ bước ta nhận được chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là $k + 4$ hoặc $k - 4$.

Như vậy, bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được Peter có thể đặt các quả cân sau hữu hạn bước để chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là 0, 1, 2 hoặc 3.

- Với $k = 0$, hiển nhiên theo vị trí xuất phát.
- Với $k = 1$, ta có thể đạt được ngay sau bước đầu tiên.
- Với $k = 2$, ta có thể đạt được sau bốn bước vì ta có $4^2 - 1^2 - 2^2 - 3^2 = 2$.
- Với $k = 3$, ta có thể đạt được sau hai bước vì ta có $2^2 - 1^2 = 3$.

(b) Để chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là 2010 thì tổng khối lượng của tất cả các quả cân phải lớn hơn hoặc bằng 2010 nên cần ít nhất 18 bước để thực hiện điều đó. Tuy nhiên, với 18 bước, ta có chín quả cân khối lượng lẻ và chín quả cân có khối lượng chẵn hay tổng khối lượng tất cả các quả cân sẽ lẻ nên chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân sẽ phải là một số lẻ, vô lý.

Với 19 bước, ta có thể đặt các quả cân có khối lượng 1^2 , 2^2 , 15^2 ở một bên đĩa cân, các quả cân còn lại ở bên đĩa cân còn lại là nhận được chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là 2010. Vậy số bước nhỏ nhất cần thực hiện là 19 bước. $\square$

2. Các bài toán hai người chơi bất bình đẳng

Các bài toán với hai người chơi bất bình đẳng lại được chia làm hai loại sau:

2.1. Các bài toán cách thực hiện nước đi của hai người khác nhau

Ở các bài toán này, sẽ có quy tắc chơi riêng dành cho hai người chơi.

Bài toán 3. Trên bảng có dãy các số $1, 2, \dots, n$ ($n \geq 3$). Tại mỗi lượt chơi, A sẽ là người chơi trước, A được quyền cộng vào hai số liền nhau bất kỳ mỗi số thêm một đơn vị, sau đó B được quyền đổi chỗ hai số liền nhau bất kỳ cho nhau. A sẽ thắng nếu tại một thời điểm nào đó, tất cả các số nhận được trên bảng là bằng nhau. Chứng minh rằng B có thể cản không cho A thắng.

Chứng minh. Ta thấy B có thể ngăn cản không cho A thắng theo cách sau đây:

- Sau $n - 2$ bước, B có thể đổi chỗ để số n (ban đầu) chuyển lên vị trí thứ hai và số 1 (ban đầu) vẫn ở vị trí đầu tiên.
- Sau $n - 2$ bước, nếu B áp dụng chiến thuật như trên thì A không thể cộng để cho số ở vị trí đầu tiên lớn hơn hoặc bằng số ở vị trí thứ hai được.
- Ở các bước tiếp theo, cho dù A chơi như thế nào thì số ở vị trí đầu tiên sẽ luôn bé hơn số ở vị trí thứ hai. $\square$

Bài toán 4. A và B chơi một trò chơi trên truyền hình. A sẽ nhận được một dãy cho trước k ($k \geq 2$) quân bài đôi một khác nhau. Trò chơi kéo dài trong tối đa $k + 3$ lượt chơi, tại mỗi lượt chơi, A sẽ được quyền chọn một số quân bài, lấy chúng ra khỏi vị trí ban đầu và đặt mỗi quân bài vào vị trí mới một cách tùy ý để nhận được một dãy các quân bài mới và đưa nó cho B. Nhiệm vụ của B là phải đoán chính xác thứ tự các quân bài trong dãy ban đầu. B chỉ được quyền trả lời một lần duy nhất trong tất cả các lượt chơi nên B sẽ chỉ trả lời khi B chắc chắn đáp án mình đưa ra là đúng hoặc khi đã ở lượt chơi cuối cùng, các trường hợp khác B sẽ bỏ qua và chuyển sang lượt tiếp theo. Nếu B đoán đúng thì B sẽ thắng, nếu B không đoán đúng được thì A sẽ thắng. Hỏi ai là người sẽ giành chiến thắng trong trò chơi này biết rằng mỗi quân bài A chỉ được chọn tối đa một lần trong tất cả các lượt chơi và A có quyền không chọn bất kỳ quân bài nào tại mỗi lượt chơi?

Lời giải. Ta sẽ chứng minh A có thể giành chiến thắng sau tối đa năm lượt chơi.

Xét hai quân bài X, Y bất kỳ. Ta có nhận xét sau: Vị trí của X so với Y bị thay đổi tối đa hai lần trong tất cả các lượt chơi.

Thật vậy, tại một lượt chơi bất kỳ, nếu cả hai quân bài X, Y đều không được chọn thì hiển nhiên vị trí của X so với Y sẽ không đổi.

Vị trí của X so với Y chỉ có thể bị thay đổi khi tại lượt chơi đó, có ít nhất một trong hai quân bài X, Y được chọn, và điều này chỉ xảy ra ở tối đa hai lượt chơi.

Sau năm lượt chơi, thứ tự đúng của X và Y sẽ là thứ tự xuất hiện trong ít nhất ba lượt chơi.

Xét tất cả các cặp các quân bài, A sẽ có thể xác định được thứ tự đúng của từng cặp quân bài và từ đó xác định được thứ tự chính xác của tất cả các quân bài. $\square$

2.2. Các bài toán cách thực hiện nước đi của hai người giống nhau nhưng quy định điều kiện thắng của hai người khác nhau

Bài toán 5. Hai người A và B chơi một trò chơi như sau. A và B lần lượt viết các chữ số 0 và 1 (từ trái sang phải) cho đến khi mỗi người viết được 2013 chữ số, khi đó sẽ nhận được biểu diễn nhị phân của một số nguyên dương N nào đó. A sẽ thắng nếu số N biểu diễn được thành tổng của hai số chính phương, và B thắng trong trường hợp ngược lại. A là người viết trước. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh rằng nếu biểu diễn nhị phân của một số nguyên dương có tận cùng bằng hai chữ số 1 và có một số chẵn các chữ số 0 thì số này không thể viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

Thật vậy, số đó có dạng $4^k(4s+3)$. Nếu giả sử ngược lại, tồn tại x, y nguyên sao cho:

$$x^2 + y^2 = 4^k(4s+3),$$

thì do $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow x, y$ cùng chẵn nên $\exists p, q : p^2 + q^2 = 4s+3$, mâu thuẫn.

Chiến thuật cho B thắng như sau:

- Nếu một trong các chữ số mà A viết xuống là 1 thì B sẽ lặp lại tất cả các chữ số mà A đã viết. Cuối cùng, số nhận được sẽ là số có dạng $4^k(4s+3)$, số này không biểu diễn được dưới dạng $x^2 + y^2$.
- Nếu A viết toàn các chữ số 0 thì B sẽ viết ba chữ số đầu là số 1 và sau đó chỉ toàn số 0. Số sau cùng là $21 \cdot 4^{2010}$, số này không viết được dưới dạng $x^2 + y^2$. $\square$

3. Các loại bài toán hai người chơi bình đẳng

Chúng ta xét loại bài toán trò chơi với hai người chơi bình đẳng với các giả thiết sau đây:

- Trò chơi gồm hai đấu thủ A và B , luân phiên nhau, mỗi người đi một nước. Quy tắc thực hiện các nước đi của hai người chơi (có thể trừ nước đầu tiên) là hoàn toàn giống nhau.
- Hai đấu thủ đều chơi rất giỏi, nghĩa là có khả năng tính trước mọi nước đi. Giả thiết chơi giỏi nhằm tránh các trường hợp “ăn may”, tức là các trường hợp do đối phương hớ hênh mà đi lạc nước. Điều này tương đương với giả thiết cả hai đấu thủ đều có thể tính trước mọi nước đi (với loại trò chơi hữu hạn) hoặc cả hai đấu thủ đều biết cách đi tốt nhất.
- Đấu thủ nào đến lượt mình không thể đi được nữa thì chịu thua và ván chơi kết thúc.
- Không có thể hòa, sau hữu hạn nước đi sẽ xác định được ai thắng, ai thua.

Trong các bài toán trò chơi, luôn luôn tồn tại hai loại vị trí: vị trí *thắng* và vị trí *thua*. Vị trí *thắng* được định nghĩa là các vị trí mà tại đó nếu người chơi thực hiện chiến thuật tối ưu thì sẽ dành chiến thắng, vị trí *thua* là vị trí mà tại đó người chơi cho dù thực hiện các nước đi như thế nào thì vẫn thua. Hai loại vị trí này có đặc điểm sau:

- Vị trí kết thúc luôn là vị trí *thắng*.
- Từ mỗi vị trí *thua*, luôn có ít nhất một cách đưa đến vị trí *thắng*.
- Từ mỗi vị trí *thắng*, luôn đưa đến vị trí *thua*.

Một đối thủ sẽ thắng khi họ bắt đầu nước đi ở vị trí *thắng* và kết thúc nước đi ở vị trí *thua*.

Khác với bài toán với một người chơi, thì trong bài toán trò chơi với hai người chơi, bất biến và nửa bất biến được tạo ra và duy trì ở mỗi vị trí *thua*. Các vị trí *thua* sẽ có chung nhau một tính chất T , người chiến thắng sẽ là người duy trì được tính chất T sau mỗi nước đi của mình. Tính chất T chính là bất biến trong bài toán trò chơi.

Để nghiên cứu tính bất biến trong các bài toán trò chơi, ta sẽ xét một lớp các bài toán trò chơi phổ biến là bài toán bốc bi.

Bài toán 6. Trên bàn có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc từ một đến năm viên bi. A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Đây là bài toán trò chơi khá quen thuộc với các bạn học sinh chuyên Toán. Ý tưởng chủ đạo của bài này là sử dụng modulo.

Lời giải. Có thể nhận thấy rằng, người chơi có thể duy trì số bi trên bàn luôn bất biến với modulo 6 (tính chất T). Thật vậy, khi người chơi trước bốc i viên bi, ta có thể bốc $6-i$ viên bi để duy trì được tính chất T . Mà vị trí *thua* cuối cùng là vị trí có 0 viên bi trên mặt bàn, nên các vị trí *thua* là các vị trí có số bi chia hết cho 6, các vị trí còn lại là vị trí *thắng*. Vị trí ban đầu là vị trí *thắng* ($2013 \equiv 3 \pmod{6}$) nên A sẽ là người có chiến thuật thắng. $\square$

Bằng cách thay đổi quy tắc bốc bi hoặc cách xét thắng cuộc, ta có các bài toán thú vị sau:

Bài toán 7. Trên bàn có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc từ một đến năm viên bi. A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người thua cuộc. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Ở bài toán này, về quy tắc bốc bi thì giống hệt Bài toán 6, điểm khác duy nhất là cách xét thắng cuộc. Khi luật chơi không thay đổi thì bất biến được sử dụng sẽ không thay đổi, và khi cách xét thắng cuộc thay đổi thì chỉ có vị trí thắng và vị trí thua thay đổi.

Trong Bài toán 7, bằng cách lập luận tương tự Bài toán 6, các vị trí thua sẽ là các vị trí có số bi chia cho 6 dư 1, các vị trí còn lại là vị trí thắng. Vị trí ban đầu là vị trí thắng nên A sẽ là người có chiến thuật thắng.

Bài toán 8. Trên bàn có n viên bi ($n \geq 2$). A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: tại lượt đầu tiên, A được phép bốc một số bi là một số nguyên dương tùy ý nhưng không được bốc toàn bộ số bi. Trong các lượt bốc tiếp theo, A và B không được phép bốc vượt quá số bi mà A bốc trong lượt đầu tiên cũng như không được phép bốc 0 viên. Ai bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi với các giá trị của n như thế nào thì A sẽ là người có chiến thuật thắng?

Thực ra, Bài toán 8 là một dạng tổng quát cho Bài toán 6.

Lời giải. Giả sử tại lượt đầu tiên A bốc k viên bi, khi đó trong các lượt tiếp theo, A và B được phép bốc từ 1 đến k viên bi. Như vậy, ta sẽ sử dụng bất biến cho các vị trí thua theo modulo $k + 1$. Lập luận tương tự Bài toán 6, các vị trí thua (sau lượt bốc đầu tiên) là các vị trí có số bi là bội của $k + 1$, các vị trí còn lại là vị trí thắng.

A sẽ thắng nếu A tìm được một số nguyên dương k sao cho $n - k$ là bội của $k + 1$ hay $n + 1 \equiv 0 \pmod{k + 1}$. Như vậy, nếu $n + 1$ là hợp số thì A sẽ có chiến thuật thắng, $n + 1$ là số nguyên tố thì B sẽ có chiến thuật thắng. □

Bài toán 9. Trên bàn có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: Mỗi lần được phép bốc số bi là lũy thừa đúng của 2 (được phép bốc một viên bi). A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật thắng?

Bài toán này đã có quy tắc bốc bi khác với ba bài toán trên. Như vậy, bất biến chúng ta sử dụng cũng như vị trí thắng, vị trí thua sẽ thay đổi theo. Vậy làm thế nào để tìm được bất biến thích hợp cho bài toán này?

Lời giải. Chúng ta sẽ tiến hành lập bảng vị trí thắng và thua của một người chơi trong các trường hợp số bi là số nhỏ.

- Khi trên bàn có một viên bi, thì đương nhiên A sẽ thắng vậy “1” là vị trí thắng.
- Khi trên bàn có hai viên bi, A vẫn là người chiến thắng, “2” là vị trí thắng.
- Khi trên bàn có ba viên bi, A sẽ thua vì với mọi cách bốc bi của A thì B đều nhận được viên bi cuối cùng nên “3” sẽ là vị trí thua.
- Khi trên bàn có n viên bi, A sẽ thắng khi và chỉ khi “ n ” là vị trí thắng hay A có thể bốc đi k viên bi sao cho “ $n - k$ ” là vị trí thua. Ngược lại “ n ” là vị trí thua.

Bằng cách thử trực tiếp với các trường hợp nhỏ, ta có bảng phân bố các vị trí thắng (W) và vị trí thua (L) như sau:

Số bi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Kết quả	W	W	L	W	W	L	W	W	L	W	W	L	W	W	L

Từ bảng trên ta có thể dự đoán rằng, bất biến ở các vị trí thua là số bi là bội của 3. Và như vậy, trong bài toán này, A sẽ là người thua cuộc, vì “2013” là một vị trí thua. Thật vậy, ta sẽ chứng minh người chơi B sẽ luôn có thể duy trì số bi còn lại luôn là bội của 3. Đến lượt bốc của A, số bi trên bàn sẽ luôn là bội của 3, và khi A bốc 2^k viên bi, số bi còn lại chắc chắn không là bội của 3 (vị trí

thắng). Đến lượt bốc của B , số bi trên bàn sẽ không là bội của 3, vậy B có thể bốc đi một hoặc hai viên bi để đưa số bi về là bội của 3 (vị trí thua). $\square$

Bài toán 10. Trên bàn có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc một viên, hai viên hoặc một nửa số bi có trên bàn nếu số bi là số chẵn. A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Lời giải. Bằng việc khảo sát với các trường hợp số bi nhỏ, ta có bảng phân bố các vị trí thắng (W) và vị trí thua (L) như sau:

Số bi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Kết quả	W	W	L	W	W	W	L	W	W	L	W	W	L	W	W

Từ bảng trên ta có thể dự đoán rằng, khi số bi lớn hơn 3, bất biến ở các vị trí thua là số bi chia cho 3 dư 1. Và như vậy, trong bài toán này, A sẽ là người thắng cuộc, vì “2013” là vị trí thắng. Thật vậy, ta sẽ chứng minh A sẽ luôn có thể duy trì số bi còn lại luôn chia cho 3 dư 1. Đến lượt bốc của A , số bi trên bàn sẽ luôn là bội của 3 hoặc chia 3 dư 2, và khi đó A có thể bốc một hoặc hai viên để đảm bảo số bi còn lại chia cho 3 dư 1 (vị trí thua).

Đến lượt bốc của B , số bi trên bàn sẽ chia cho 3 dư 1, khi đó B sẽ không có cách nào để tiếp tục duy trì số bi chia cho 3 dư 1, hay B luôn đưa số bi về vị trí thắng. $\square$

Bài toán 11. Trên bàn có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc tối thiểu một viên bi và không được bốc nhiều hơn nửa số bi còn lại trong đồng. A là người bốc bi trước, đến lượt mình mà ai không thể thực hiện được nước đi là người thua cuộc. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Lời giải. Bằng việc khảo sát với các trường hợp số bi nhỏ, ta có bảng phân bố các vị trí thắng (W) và vị trí thua (L) như sau:

Từ bảng trên ta có thể dự đoán rằng, bất biến ở các vị trí thua là số bi có dạng $2^k - 1$. Và như vậy, trong bài toán này, A sẽ là

Số bi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Kết quả	L	W	L	W	W	W	L	W	W	W	W	W	W	W	L

người thắng cuộc, vì “2013” là một vị trí thắng. Thật vậy, ta sẽ chứng minh người chơi A sẽ luôn có thể duy trì số bi còn lại có dạng $2^k - 1$.

Ở lượt bốc đầu tiên, A bốc 990 viên. Đến mỗi lượt bốc của B , số bi trên bàn sẽ có dạng $2^k - 1$, khi đó B sẽ được phép bốc từ 1 đến $2^{k-1} - 1$ viên bi. Như vậy, số bi còn lại trên bàn sau lượt bốc của B sẽ có dạng $2^{k-1} - 1 + r$, với $1 \leq r \leq 2^{k-1} - 1$. Đến lượt bốc của A , A sẽ bốc r viên bi để đảm bảo số bi còn lại là $2^{k-1} - 1$, đây là một vị trí thua. $\square$

Nhận xét. Bài toán trên có một dạng phát biểu hình học khá thú vị như sau: “Cho một đoạn thẳng trên trục số dài N đơn vị với các điểm chia nguyên. A và B lần lượt thực hiện các lượt chơi theo nguyên tắc sau: mỗi lần cắt đoạn thẳng tại một điểm nguyên nằm trong đoạn để thu được hai đoạn con sau đó vứt đi đoạn ngắn, trao đoạn dài cho người kia. Nếu hai đoạn bằng nhau thì vứt đi một đoạn tùy ý. A là người thực hiện trước, đến lượt mình mà ai không thể thực hiện được nước đi là người thua cuộc. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?”

Sau đây, ta sẽ xét các bài toán khác cũng thuộc lớp các bài toán bốc bi nhưng lúc này bi được chia làm nhiều đồng:

Bài toán 12. Trên bàn có hai đồng bi, mỗi đồng có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đồng và bốc từ đồng đó một số bi tùy ý. A là người bốc trước, ai là người bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Lời giải. Chúng ta có thể nhận thấy người chơi B luôn có thể duy trì trạng thái hai đồng bi bằng nhau sau mỗi nước đi của mình.

Thật vậy, khi người chơi A bốc k viên bi ở một đồng thì người chơi B cũng sẽ bốc k viên bi ở đồng kia. Như vậy sau hữu hạn các nước đi, người chơi A sẽ phải đưa số bi về trạng thái $(0, n)$.

Đây là một vị trí thắng. Vậy người chơi B là người có chiến thuật thắng. $\square$

Bài toán 13. Trên bàn có hai đồng bi, mỗi đồng có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đồng và bốc từ đồng đó một số bi là ước của số bi ở đồng kia. A là người bốc trước, ai là người bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Lời giải. Vì số bi ở cả hai đồng đều là số lẻ nên sau khi người chơi A bốc thì số bi ở hai đồng chắc chắn sẽ khác tính chẵn lẻ. Người chơi B chỉ việc bốc một viên bi từ đồng có số bi chẵn để tiếp tục duy trì trạng thái số bi ở cả hai đồng đều là số lẻ.

Như vậy sau mỗi lượt người B chơi chắc chắn cả hai đồng đều còn bi. B chỉ cần đợi A bốc hết bi ở một đồng và người chơi B sẽ bốc hết bi ở đồng còn lại và giành chiến thắng. $\square$

Bài toán 14. Trên bàn có hai đồng bi, đồng thứ nhất có 2013 viên bi, đồng thứ hai có 20132013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đồng và bốc từ đồng đó tối thiểu một viên và tối đa một nửa số bi trong đồng. A là người bốc trước, đến lượt mình mà ai không thể thực hiện được nước đi là người thua cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Lời giải. Ta xét bài toán tổng quát với số bi ở hai đồng là m, n . Ta sẽ chứng minh (m, n) , $m \geq n$ là một vị trí thua khi $m+1 = 2^k(n+1)$, $k \in \mathbb{N}$. (*)

Ta sẽ chứng minh (*) bằng quy nạp theo $p = k + n$. Dễ thấy $(1, 1)$ là một vị trí thua nên (*) đúng với $p = 1$. Giả sử (*) đúng với mọi $p \leq p_0$. Ta xét vị trí (m_0, n_0) , $m_0 \geq n_0$ thỏa mãn $m_0 + 1 = 2^{k_0}(n_0 + 1)$, trong đó $k_0 + n_0 = p_0 + 1$ và đến lượt A bốc bi.

- Nếu A bốc r viên ở đồng có n_0 viên bi thì B bốc $2^{k_0}r$ viên ở đồng kia, số bi ở hai đồng được đưa về trạng thái $(m_0 - 2^{k_0}r, n_0 - r)$, đây là một vị trí thua theo giả thiết quy nạp.

- Nếu A bốc r viên ở đồng có m_0 viên bi thì B bốc tiếp $2^{k_0-1}(n_0 + 1) - r$ viên ở đồng đó, số bi ở hai đồng được đưa về trạng thái $(m_0 - 2^{k_0-1}(n_0 + 1), n_0)$, đây là một vị trí thua theo giả thiết quy nạp.

Suy ra các vị trí (m_0, n_0) , $m_0 \geq n_0$ thỏa mãn $m_0 + 1 = 2^{k_0}(n_0 + 1)$ trong đó $k_0 + n_0 = p_0 + 1$ là các vị trí thua. Theo nguyên lý quy nạp thì (*) đúng với mọi $p = k + n$.

Như vậy, ở bài toán này, A sẽ là người chiến thắng vì A có thể bốc 3633326 viên ở đồng thứ hai để đưa số bi ở hai đồng về vị trí thua. $\square$

Nhận xét. Bài toán trên có một dạng phát biểu hình học khá thú vị như sau: “Cho một lưới chữ nhật kích thước $n \times m$ đơn vị nguyên. A và B lần lượt thực hiện các lượt chơi theo nguyên tắc sau: cắt hình theo một đường kẻ trong lưới đi qua một điểm nguyên trên một cạnh và không trùng với đỉnh để thu được hai hình chữ nhật sau đó bỏ đi hình có diện tích nhỏ hơn, trao hình có diện tích lớn hơn cho người kia. Nếu hai hình có diện tích bằng nhau thì bỏ đi một hình tùy ý. A là người thực hiện trước, đến lượt mình mà ai không thể thực hiện được nước đi là người thua cuộc. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?”

Bài toán 15. Trên bàn có hai đồng bi, đồng thứ nhất có 2013 viên bi, đồng thứ hai có 3102 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đồng và bốc từ đồng đó một số bi tùy ý hoặc bốc một số bi tùy ý bằng nhau ở cả hai đồng. A là người bốc trước, ai là người bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Lời giải. Ta xét hai dãy (a_n) và (b_n) được xác định như sau:

- $a_1 = 1, b_1 = 2$.
- a_n là số nguyên dương nhỏ nhất không thuộc tập hợp $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$.
- $b_n = a_n + n$.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n , (a_n, b_n) là vị trí thua.

Với $n = 1$, dễ thấy $(1, 2)$ là một vị trí thua. Giả sử (a_n, b_n) là vị trí thua với mọi $n \leq k$. Ta chứng minh: (a_{k+1}, b_{k+1}) là một vị trí thua.

Thật vậy, giả sử số bi ở hai đồng đang ở vị trí (a_{k+1}, b_{k+1}) và đến lượt người chơi A bốc bi.

- Nếu A bốc r ($r \geq 1$) viên ở đồng có a_{k+1} viên hoặc bốc $k+1+r$ ($r \geq 1$) viên ở đồng có b_{k+1} viên thì suy ra tồn tại $j \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a_j = a_{k+1} - r$ hoặc $b_j = a_{k+1} - r$, khi đó B chỉ cần bốc một lượng bi vừa đủ ở đồng kia để đưa số bi ở hai đồng về vị trí (a_j, b_j) .
- Nếu A bốc r ($1 \leq r \leq k$) viên ở đồng có b_{k+1} viên thì hiệu số bi ở hai đồng sẽ bằng $j < k+1$, khi đó B bốc ở hai đồng với cùng một số lượng bi như nhau để đưa số bi ở hai đồng về vị trí (a_j, b_j) .
- Nếu A bốc $k+1$ viên ở đồng có b_{k+1} viên thì người chơi B chỉ cần bốc ở mỗi đồng a_{k+1} viên và giành chiến thắng. $\square$

4. Bài tập tương tự

Bài tập 1. Trên bàn có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc số bi có dạng p^k , trong đó p là số nguyên tố và k là một số tự nhiên tùy ý (được phép bốc một viên bi). A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Bài tập 2. Trên bàn có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc một viên, hai viên hoặc sáu viên. A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Bài tập 3. Trên bàn có 6^{2013} viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc từ một đến năm viên bi hoặc

bốc đi $\frac{5}{6}$ số bi của đồng nếu số bi là bội của 6. A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Bài tập 4. Trên bàn có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần phải bốc ít nhất một viên bi và không được bốc nhiều hơn 2012 viên cũng như không vượt quá số bi của người trước bốc. A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Bài tập 5. Trên bàn có 2013 viên bi và chín lá bài may mắn. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc từ một đến năm viên bi hoặc sử dụng lá bài may mắn để được bốc sáu viên bi (mỗi lá bài may mắn chỉ được sử dụng một lần). A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Bài tập 6. Trên bàn có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: tại lượt đầu tiên, A được phép bốc một số bi là một số nguyên dương tùy ý nhưng không được bốc toàn bộ số bi. Trong các lượt bốc tiếp theo, A và B không được phép bốc vượt quá hai lần số bi mà đối thủ bốc trong lượt ngay trước đó cũng như không được phép bốc 0 viên. Ai bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Bài tập 7. Trên bàn có hai đồng bi, mỗi đồng có 2013 viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đồng và bốc từ đồng đó một số bi có dạng 2^k ($k \in \mathbb{N}$). A là người bốc trước, ai là người bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?

Bài tập 8. Trên bàn có 2013 đồng bi, đồng thứ i có F_i viên bi, với F_k là số Fibonacci thứ k . A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đồng và bốc từ đồng đó một số bi tùy ý. A là người bốc trước, ai là người bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?

CẤP SỐ NGUYÊN, CĂN NGUYÊN THỦY VÀ ỨNG DỤNG

Nguyễn Duy Liên[†]

Ngạn ngữ Pháp có câu: “Le Mathématique est le Roi des Sciences mais L’Arithmétique est la Reine”, dịch nghĩa: “Toán học là vua của các khoa học nhưng Số học là Nữ hoàng”. Điều này nói lên tầm quan trọng của Số học trong đời sống và khoa học. Số học giúp con người ta có cái nhìn tổng quát, sâu rộng hơn, suy luận chặt chẽ và tư duy sáng tạo.

Trong các kì thi chọn học sinh giỏi các cấp THCS, THPT cấp tỉnh, cấp Quốc gia, cấp khu vực, cấp Quốc tế, các bài toán về Số học thường đóng vai trò quan trọng. Chúng ta có thể làm quen nhiều dạng bài toán Số học, biết nhiều phương pháp giải, nhưng cũng có bài chỉ có một cách giải duy nhất. Mỗi khi gặp một bài toán mới chúng ta lại phải suy nghĩ tìm cách giải mới. Sự phong phú đa dạng của các bài toán Số học luôn là sự hấp dẫn đối với mỗi giáo viên, học sinh giỏi yêu Toán. Xuất phát từ những ý nghĩ đó tôi đã sưu tầm và hệ thống lại một số bài toán để viết lên chuyên đề “Cấp số nguyên, căn nguyên thủy và ứng dụng”.

Mục tiêu ở đây là một số bài mẫu, một số bài khác biệt căn bản đã nói lên được phần chính yếu của chuyên đề. Tuy vậy, những thiếu sót nhầm lẫn cũng không thể tránh khỏi được tất cả, về phương diện chuyên môn cũng như phương diện sư phạm. Lối trình bày bài giải của tôi không phải là một lối duy nhất. Tôi đã cố gắng áp dụng cách giải cho phù hợp với chuyên đề, học sinh có thể theo mà không lạc hướng. Ngoài ra lúc viết tôi luôn luôn chú ý đến các bạn vì nhiều lí do phải tự học, vì vậy giản dị và đầy đủ là phương châm của tôi khi viết chuyên đề này.

[†]Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc.

1. Các ký hiệu

- $\mathbb{N}$: Tập hợp các số tự nhiên $\{0, 1, 2, \dots, \}$.
- $\mathbb{N}^*$: Tập hợp các số tự nhiên khác 0.
- $\mathbb{Z}$: Tập hợp các số nguyên.
- $\mathcal{P}$: Tập hợp các số nguyên tố.
- $\mathbb{Q}$: Tập hợp các số hữu tỷ.
- $\mathbb{C}$: Tập hợp các số phức.
- $\mathbb{R}$: Tập hợp các số thực.
- $x \in \mathbb{Z}$: x là số nguyên.
- $b \mid a$: b chia hết a , b là ước của a .
- $b \nmid a$: b không là ước của a .
- $a \equiv b \pmod{m}$: a đồng dư b modulo m , $m \mid a - b$.
- (a, b) : Ước chung lớn nhất của a và b .
- $[a, b]$: Bội chung nhỏ nhất của a và b .
- $(a; b)$: Cặp số, nghiệm của phương trình ẩn hai số.
- $\Rightarrow$: Suy ra.
- $\Leftrightarrow$: Tương đương với, khi và chỉ khi.
- (đpcm): Điều phải chứng minh, kết thúc bài toán hay một phép chứng minh
- $\exists, \forall, \vee, \cap$: Tồn tại, mọi, hoặc, giao.
- $\varphi(n)$: Hàm Euler của số nguyên dương n .

2. Kiến thức cơ bản

Từ định lý Euler ta có nếu m là số nguyên dương và nếu a là số nguyên nguyên tố cùng nhau với m thì $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. Do đó, phương trình đồng dư $a^x \equiv 1 \pmod{m}$ luôn có nghiệm. Theo tính chất thứ tự tốt của tập hợp số nguyên dương, phải tồn tại số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn đồng dư trên.

Định nghĩa 1. Giả sử a và m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Khi đó số nguyên dương h nhỏ nhất sao cho $a^h \equiv 1 \pmod{m}$ được gọi là **cấp** của a modulo m . Ký hiệu cấp của a modulo m là $\text{ord}_m(a)$.

Định lý 1. (a) Giả sử cấp của $a \bmod n$ là h . Khi đó $a^h \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow h \mid k$.

(b) Giả sử a có cấp $h \bmod n$, b có cấp $l \bmod n$ và $(h, l) = 1$ thì ab có cấp $hl \bmod n$.

(c) Cho các số $n_1, n_2, \dots, n_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau và $n = n_1 n_2 \dots n_k$. Giả sử với mỗi i , h_i là cấp của $a \bmod n_i$. Khi đó cấp của $a \bmod n$ là $h = [h_1, h_2, \dots, h_k]$.

Chứng minh. (a) Giả sử $a^k \equiv 1 \pmod{n}$, nếu $k = qh + r$, $1 \leq r < h$ thì ta có

$$a^k = a^r (a^h)^q \equiv a^r \pmod{n},$$

suy ra $a^r \equiv 1 \pmod{n}$. Điều này trái với cách chọn h . Vậy $r = 0$ hay $h \mid k$. Để thấy điều ngược lại hiển nhiên đúng.

(b) Giả sử t là cấp của $ab \bmod n$. Ta có $(ab)^{hl} = a^{hl} b^{hl} \equiv 1 \pmod{n}$ suy ra:

$$t \mid hl. \quad (*)$$

Ta cũng có $1 \equiv (ab)^{th} = a^{th} b^{th} \equiv b^{th} \pmod{n}$ suy ra $l \mid th$ vì $(h, l) = 1$. Tương tự, ta cũng thu được $l \mid t$. Mà do $(h, l) = 1$ nên:

$$hl \mid t. \quad (**)$$

Từ (*) và (**), ta có $t = hl$.

(c) Gọi h là cấp của $a \bmod n$. Ta có $a^h \equiv 1 \pmod{n_i}$ suy ra $h_i \mid h$ vậy h là một bội chung của $h_1, h_2, \dots, h_k$. Nếu l là một bội chung bất kỳ của $h_1, h_2, \dots, h_k$ thì ta có $a^l \equiv 1 \pmod{n_i}$ suy ra $a^l \equiv 1 \pmod{n}$, dẫn tới $h \mid l$ nên $h = [h_1, h_2, \dots, h_k]$. $\square$

Từ phần (c) của định lý trên ta thấy rằng bài toán tìm cấp của a modulo n được quy về bài toán tìm cấp của a modulo p^s với p nguyên tố.

Định lý 2. Cho a là số nguyên lẻ và $n = 2^s$ ($s \in \mathbb{N}^*$). Giả sử $a - 1 = 2^u b$ và $a^2 - 1 = 2^v c$ trong đó $1 \leq u < v$, b, c là các số lẻ. Gọi h là cấp của $a \bmod n$. Khi đó:

$$h = \begin{cases} 1 & \text{nếu } u \geq s \\ 2^{\max\{1, s+1-u\}} & \text{nếu } u < s \end{cases}$$

Chứng minh. Ta có $h \mid \varphi(2^s)$ nên $h = 2^s \cdot t \leq s - 1$. Rõ ràng nếu $u \geq s$ thì $n \mid a - 1$ do đó $h = 1$.

Nếu $s > u$ thì $h \geq 2$ dẫn tới $t \geq 1$. Ta có $a^h - 1 = (a + 1)(a^2 + 1) \dots (a^{2^{t-1}} + 1)$.

Nếu $u < s \leq v$ thì $n \mid a^2 - 1$, suy ra $h = 2$. Nếu $s > v$ thì từ đẳng thức trên ta suy ra $a^h - 1 = 2^{v+t-1}$, do vậy nó chia hết cho 2^s khi và chỉ khi $v + t - 1 \geq s$, suy ra $t \geq s + 1 - v \geq 2$ và như vậy t nhỏ nhất là $t = s + 1 - v$. $\square$

Định lý 3. Cho p là số nguyên lẻ, $(a, p) = 1$ và $n = p^s$. Giả sử r là cấp của $a \bmod p$ và $a^r - 1 = p^u q$ với $(p, q) = 1$. Gọi h là cấp của $a \bmod n$. Khi đó:

$$h = \begin{cases} r & \text{nếu } u \geq s \\ rp^{s-u} & \text{nếu } u < s \end{cases}$$

Chứng minh. Ta có hai trường hợp xảy ra:

- **Trường hợp 1.** $r = 1$. Rõ ràng nếu $u \geq s$ thì $h = 1$. Xét $u < s$. Giả sử $h = p^t q$ với $(p, q) = 1$. Nếu $q > 1$ thì do $a \equiv 1 \pmod{p}$ nên $a^h - 1 = (a^{p^t} - 1)b$ với $(p, b) = 1$. Vậy $a^{p^t} - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ trái giả thiết là h bé nhất. Vậy $h = p^t$, $t > 0$. Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 1. Với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì ta có $a^{p^n} - 1 = p^{n+u}A$ với $(p, A) = 1, A \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Với $n = 0$ bổ đề đúng. Giả sử bổ đề đúng tới n . Đặt $b = a^{p^n}$ ta có

$$a^{p^n} - 1 = b^p - 1 = (b-1)(b^{p-1} + b^{p-2} + \dots + 1) = (a^{p^n} - 1)B.$$

Ta có $b \equiv 1 \pmod{p}$, p lẻ, $p \mid B$ và $p^2 \nmid B$, do đó $a^{p^{n+1}} - 1 = p^{n+u+1}A$ với $(p, A) = 1$. Vậy bổ đề được chứng minh. ■

Theo bổ đề trên, ta có $a^h - 1 = p^{t+u}A$, $(p, A) = 1$. Do đó $t + u \geq s$, suy ra $t \geq s - u \geq 1$, vậy t nhỏ nhất là $t = s - u$ hay $h = p^{s-u}$.

- **Trường hợp 2.** r bất kỳ. Khi đó $a^h \equiv 1 \pmod{n}$ suy ra $a^h \equiv 1 \pmod{p}$ dẫn tới $h = lr$. Đặt $b = a^r$. Vì $a^h = b^l$ nên dễ thấy cấp của $b \pmod{p}$ là 1 và cấp của $b \pmod{n}$ là l . Vậy theo trường hợp $r = 1$ áp dụng đối với b , ta có

$$l = \begin{cases} 1 & \text{nếu } u \geq s \\ p^{s-u} & \text{nếu } u < s \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra $h = rl$. □

Từ những kết quả ở trên, ta thấy rằng việc tìm cấp của một số theo modulo n được quy hoàn toàn về việc tìm cấp theo modulo p với p nguyên tố.

Hệ quả 1. Nếu a và n là các số nguyên nguyên tố cùng nhau, $n > 0$ thì $\text{ord}_n(a) \mid \varphi(n)$.

Hệ quả 2. Nếu a và n là các số nguyên nguyên tố cùng nhau, $n > 0$ thì đồng dư thức:

$$a^i \equiv a^j \pmod{n}$$

có nghiệm đúng nếu và chỉ nếu $i \equiv j \pmod{\text{ord}_n(a)}$.

Hệ quả 3. Giả sử $\text{ord}_m(a) = t$ và u là một số nguyên dương. Khi đó $\text{ord}_m(a^u) = \frac{t}{t-u}$.

Định nghĩa 2. Nếu a và n là các số nguyên nguyên tố cùng nhau, $n > 0$ đồng thời

$$\text{ord}_m(a) = \varphi(n),$$

thì a được gọi là căn nguyên thủy modulo n .

Định lý 4. Nếu a và n là các số nguyên nguyên tố cùng nhau, $n > 0$ và a là căn nguyên thủy modulo n thì tập $\{a^1, a^2, \dots, a^{\varphi(n)}\}$ lập thành hệ thặng dư thu gọn modulo n .

Chứng minh. Do $(a, n) = 1$ nên $(a^k, n) = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$ suy ra mọi lũy thừa trên đây nguyên tố cùng nhau với n . Giả sử trong dãy có hai số a^i và a^j đồng dư với nhau modulo n , theo Hệ quả 2 ta có $i \equiv j \pmod{\varphi(n)}$ do a là căn nguyên thủy modulo n .

Vì $1 \leq i \leq \varphi(n), 1 \leq j \leq \varphi(n)$ nên suy ra $i = j$. Vậy không có hai số nào trong tập hợp trên đồng dư với nhau modulo n . Định lý được chứng minh. □

Hệ quả 4. Giả sử g là căn nguyên thủy modulo m , trong đó m nguyên dương lớn hơn 1. Khi đó g^u là căn nguyên thủy modulo m khi và chỉ khi $(u, \varphi(m)) = 1$.

Hệ quả 5. Xét một số nguyên dương m cho trước. Khi đó, nếu m có căn nguyên thủy thì nó có tất cả $\varphi(\varphi(m))$ căn nguyên thủy.

3. Ứng dụng vào giải toán

3.1. Ứng dụng trong các bài toán chứng minh chia hết

Bài toán 1. Cho hai số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau. Đặt $A = a^{2^n} + b^{2^n}$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng mọi ước lẻ của A có dạng $2^{n+1}k + 1$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh mọi ước nguyên tố lẻ của A là đủ. Gọi p là một ước nguyên tố lẻ bất kỳ của A thì ta có

$$a^{2^n} \equiv -b^{2^n} \pmod{p}. \quad (1)$$

Do $(a, b) = 1$ nên $(a, p) = (b, p) = 1$ suy ra tồn tại $b' \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ để $bb' \equiv 1 \pmod{p}$. Vậy từ (1) ta có $a^{2^{n+1}} \equiv b^{2^{n+1}} \pmod{p}$ suy ra $(ab')^{2^{n+1}} \equiv (bb')^{2^{n+1}} \pmod{p}$, dẫn tới:

$$(ab')^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (2)$$

Đặt $h = \text{ord}_p(ab')$. Từ (2) và định lý Fermat ta có

$$\begin{cases} h \mid 2^{n+1} \\ h \mid p-1 \end{cases} \Rightarrow h = 2^\alpha, \alpha \in [0, n+1].$$

Nếu $0 \leq \alpha \leq n$, ta có $(ab')^{2^n} = \left[(ab')^{2^{n-\alpha}}\right]^{2^\alpha} \equiv 1 \pmod{p}$ mà $(bb')^{2^n} \equiv 1 \pmod{p}$ nên suy ra:

$$(ab')^{2^n} \equiv (bb')^{2^n} \pmod{p},$$

hay:

$$a^{2^n} \equiv b^{2^n} \pmod{p}. \quad (3)$$

Từ (1) và (3), ta suy ra $2a^{2^n} \equiv 0 \pmod{p}$, mà $(a, p) = 1$ nên $p \mid 2$, vô lý. Vậy $\alpha = n+1$ suy ra $2^{n+1} \mid p-1$, hay là $p = 2^{n+1}k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán 1 có thể coi là một bài toán tổng quát cho một số bài toán có dạng trên. Chẳng hạn bằng cách sử dụng Bài toán 1 ta có thể giải được bài toán sau: Chứng minh rằng tồn tại vô hạn cặp số nguyên tố (p, q) thỏa mãn $q \mid 2^{p-1} - 1$ và $p \mid 2^{q-1} - 1$.

Bài toán 2. Cho n nguyên dương lẻ khác 1. Chứng minh rằng:

(a) Nếu $n \mid (6^n + 7^n)$ thì $13 \mid n$.

(b) Tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $n \mid (6^n + 7^n)$.

Chứng minh. (a) Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n thì p lẻ. Từ giả thiết,

$$p \mid (6^n + 7^n), \quad (1)$$

ta có $(6, p) = (7, p) = 1$ nên tồn tại duy nhất $x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ sao cho $7x \equiv 1 \pmod{p}$. $\quad (2)$

Kết hợp (1) và (2), ta được $p \mid x^n(6^n + 7^n)$ suy ra $p \mid [(6x)^n + (7x)^n]$, hay:

$$p \mid [(6x)^n + 1].$$

Vì n lẻ nên ta thu được:

$$(-6x)^n \equiv 1 \pmod{p}. \quad (3)$$

Bây giờ, đặt:

$$\text{ord}_p(-6x) = h. \quad (4)$$

Ta có

$$\begin{cases} (-6x)^n \equiv 1 \pmod{p} \\ (-6x)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h \mid n \\ h \mid p-1 \end{cases} \Rightarrow h \leq p-1 < p,$$

suy ra $h = 1$ do cách chọn p . Điều này dẫn đến $-6x \equiv 1 \pmod{p}$ mà $7x \equiv 1 \pmod{p}$ nên $p \mid (6x + 7x)$ hay $p \mid 13x$, suy ra $p \mid 13$ hay $p = 13$. Vậy $13 \mid n$.

(b) Ta có thể chứng minh bằng quy nạp theo n rằng tồn tại vô số số nguyên dương n có dạng 3^k thỏa mãn $n \mid (6^n + 7^n)$. $\square$

Nhận xét. Ta có bài toán tổng quát như sau: Cho n, a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $(a, b) = 1$, $a + b$ là số nguyên tố và $n \mid a + b$. Chứng minh rằng:

(a) $n \mid (a + b)$.

(b) Tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $n \mid (a^n + b^n)$ và $n \mid (a + b)$.

Bài toán 3 (THTT 6/2006). Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn các số $2a - 1, 2b - 1, a + b$ là các số nguyên tố. Chứng minh rằng các số $a^b + b^a, a^a + b^b$ đều không chia hết cho $a + b$.

Chứng minh. Vì các số $2a - 1, 2b - 1$ đều là các số nguyên tố nên $a, b > 1$, vì thế $a + b$ là số nguyên tố lẻ. Không mất tính tổng quát giả sử a chẵn, b lẻ, suy ra $(a + b) \mid (a^b + b^b)$.

Bây giờ, giả sử $(a+b) \mid (a^b + b^a)$. Ta xét $a > b$, nếu $b > a$ ta lập luận tương tự. Do:

$$a^b + b^a = a^b + b^b + b^b(b^{a-b} - 1),$$

nên ta có

$$a+b \mid b^b(b^{a-b} - 1).$$

Lại có $(a+b) \nmid b^b$ do $(a, b, a+b) = 1$ nên:

$$(a+b) \mid (b^{a-b} - 1). \quad (1)$$

Do $a+b$ là số nguyên tố nên theo định lý Fermat ta có

$$(a+b) \mid (b^{a+b-1} - 1). \quad (2)$$

Đặt $h = \text{ord}_{a+b}(b)$ thì $a^h \equiv 1 \pmod{a+b}$. Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{cases} h \mid (a-b) \\ h \mid (a+b-1) \end{cases} \Rightarrow h \mid (2a-1).$$

Mà $2a-1$ là số nguyên tố nên $h=1$ hoặc $h=2a-1$.

- Nếu $h=1$ thì $a \equiv 1 \pmod{a+b}$ suy ra $0 < a+b < a-1$, vô lý.
- Nếu $h=2a-1$ thì $(2a-1) \mid (a+b-1)$ hay $(2a-1) \mid (a-b)$, vô lý vì $2a-1 > a-b$.

Vậy điều giả sử là sai và ta có $(a+b) \nmid (a^b + b^a)$. Tương tự, $(a+b) \nmid (a^a + b^b)$. $\square$

Bài toán 4. Cho $p \geq 5$ là một số nguyên tố.

(a) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên tố q khác p thỏa $q \mid [(p-1)^p + 1]$.

(b) Giả sử $(p-1)^p + 1 = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i}$ với p_i là các số nguyên tố và $a_i \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n p_i a_i \geq \frac{p^2}{2}.$$

Chứng minh. (a) Ta có $p \mid [(p-1)^p + 1]$ nên $(p-1)^p + 1$ là hợp số, đồng thời:

$$p^{p-1} < (p-1)^p + 1 < p^p,$$

nên tồn tại ước nguyên tố q khác p của $(p-1)^p + 1$.

(b) Đặt $A = \sum_{i=1}^n p_i a_i$ và $B = \sum_{i=1}^n a_i$.

- Nếu $B \leq \frac{p-1}{2}$ thì theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$A \geq B \sqrt[B]{(p-1)^p + 1} > B \sqrt[B]{p^{p-1}} > \sqrt[B]{p^{p-1}} \geq p^2 > \frac{p^2}{2}.$$

- Nếu $\frac{p+1}{2} < B < p$ thì cũng theo AM-GM ta có

$$A \geq B \sqrt[B]{(p-1)^p + 1} > B \sqrt[B]{p^{p-1}} = B p^{\frac{p-1}{B}} > \frac{p+1}{2} p > \frac{p^2}{2}.$$

- Nếu $B \geq p$ thì do $q \mid [(p-1)^p + 1]$ nên $q \mid (p-1)^{2p} - 1$. Đặt $\text{ord}_q(p-1) = h$ thì ta có

$$\begin{cases} h \neq p \\ h \mid (q-1) \Rightarrow h = 2 \vee h = 2p. \\ h \mid 2p \end{cases}$$

Nếu $h=2$ thì $q \mid [(p-1)^2 - 1]$ suy ra $q \mid p-2$ vì $q \neq p$. Khi đó:

$$0 \equiv (p-1)^p + 1 \equiv 2 \pmod{q},$$

nên $q=2$, vô lý vì q lẻ.

Nếu $h=2p$ thì $2p \mid (q-1)$, suy ra $q-1 \geq 2p > p$. Từ đây ta có $p_i > p, \forall i = \overline{1, n}$, suy ra:

$$A \geq p(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = Bp \geq p^2 > \frac{p^2}{2}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Nhận xét. Bài toán với đánh giá tốt hơn như sau: Cho $p \geq 5$ là một số nguyên tố. Giả sử $(p-1)^p + 1 = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i}$ với p_i là các số nguyên tố và $a_i \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n p_i a_i \geq p^2.$$

Bài toán 5. Chứng minh rằng với mọi m, n nguyên dương thì tồn tại x nguyên dương thỏa mãn:

$$\begin{cases} 2^x \equiv 1999 \pmod{3^m} \\ 2^x \equiv 2009 \pmod{5^n} \end{cases}$$

Chứng minh. Ta có thể chứng minh được 2 là căn nguyên thủy modulo 3^m và modulo 5^n . Từ đó suy ra tồn tại x_1, x_2 để:

$$\begin{cases} 2^{x_1} \equiv 1999 \pmod{3^m} \\ 2^{x_2} \equiv 2009 \pmod{5^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x_1} \equiv 1 \pmod{3} \\ 2^{x_2} \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

Từ đây, ta thấy ngay x_1, x_2 chẵn. Như vậy, hệ phương trình đồng dư:

$$\begin{cases} t \equiv \frac{x_1}{2} \pmod{3^{m-1}} \\ t \equiv \frac{x_2}{2} \pmod{2 \cdot 5^{n-1}} \end{cases}$$

có nghiệm theo định lý dư Trung Hoa. Chọn $x = 2t$ thì ta có

$$\begin{cases} x \equiv x_1 \pmod{2 \cdot 3^{m-1} = \varphi(3^m)} \\ x \equiv x_2 \pmod{4 \cdot 5^{n-1} = \varphi(5^n)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \equiv 1999 \pmod{3^m} \\ 2^x \equiv 2009 \pmod{5^n} \end{cases}$$

Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Bài toán 6. Cho p là số nguyên tố, $p \equiv 3 \pmod{8}$ hoặc $p \equiv 5 \pmod{8}$, $p = 2q + 1$, trong đó q cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $\omega^2 + \omega^4 + \omega^8 + \dots + \omega^{2^{p-1}} = -1$ với ω là một nghiệm khác 1 của phương trình $X^p = 1$.

Chứng minh. Ta có $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ nên 2 không chính phương mod p , hay là:

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p},$$

dẫn tới $2^{2q} = 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Đặt $h = \text{ord}_p(2)$ thì $h \mid (p-1)$ hay $h \nmid 2q$. Vì q nguyên tố nên $h = 1$ hoặc $h = 2$ hoặc $h = 2q$.

- Nếu $h = 1$ thì $2^1 \equiv 1 \pmod{p}$ suy ra $p \mid 1$, vô lý.
- Nếu $h = 2$ thì $2^2 \equiv 1 \pmod{p}$ suy ra $p = 3, q = 1$, vô lý.
- Nếu $h = 2q$ thì $h = p-1 = \varphi(p)$, suy ra 2 là căn nguyên thủy modulo p . Như thế, tập $\{2^1, 2^2, \dots, 2^{p-1}\}$ là hệ thặng dư thu gọn mod p , hay là:

$$\{2^1, 2^2, \dots, 2^{p-1}\} \equiv \{1, 2, \dots, p-1\}.$$

Từ đây, ta có

$$\begin{aligned} \omega^2 + \omega^4 + \omega^8 + \dots + \omega^{2^{p-1}} &= \omega^1 + \omega^2 + \dots + \omega^{p-1} \\ &= \frac{\omega(\omega^p - 1)}{\omega - 1} - 1 = -1. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. $\square$

3.2. Ứng dụng trong giải các bài toán tìm số nguyên thỏa mãn một tính chất cho trước

Bài toán 7. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) thỏa mãn $pq \mid (p^p + q^q + 1)$.

Lời giải. Từ giả thiết ta thấy $p \neq q$ và do vai trò p, q như nhau nên có thể giả sử $p < q$. Nếu $p = 2$ thì từ giả thiết có $2q \mid (q^q + 5)$, suy ra $q \mid 5$ hay $q = 5$. Vậy cặp $(p, q) = (2, 5)$ thỏa mãn.

Xét $p > 2$. Ta có p, q là các số nguyên tố lẻ nên $q - p \geq 2$. Ngoài ra:

$$q \mid (p^p + q^q + 1) \Rightarrow q \mid (p^p + 1) \Rightarrow q \mid (p^{2p} - 1).$$

Đặt $h = \text{ord}_q(p)$ thì có $q \mid (p^{q-1} - 1)$ theo Fermat, suy ra $h \mid 2p$ và $h \mid (q-1)$.

Xảy ra các trường hợp sau:

- $h = 1$. Lúc này có $q \mid (p-1)$ suy ra $p < q \leq p-1$, vô lý.

- $h = 2$. Ta có $q \mid (p^2 - 1)$ nên $q \mid (p - 1)$ hoặc $q \mid (p + 1)$, cả hai khả năng đều không xảy ra do $q - p \geq 2$.
- $h = p$. Ta có $q \mid (p^p - 1)$ đồng thời $q \mid (p^p + 1)$ nên $q \mid 2$, vô lý.
- $h = 2p$. Ta có $2p \mid (q - 1)$ nên $p \mid (q - 1)$, vì thế:

$$0 \equiv p^p + q^q + 1 \equiv 1^q + 1 \equiv 2 \pmod{p},$$

suy ra $p \mid 2$, vô lý.

Vậy không tồn tại p, q khi $q > p > 2$. Do đó $(p, q) = (2, 5), (5, 2)$ là tất cả các cặp cần tìm. $\square$

Bài toán 8. Tìm số nguyên dương n lẻ nhỏ nhất sao cho tồn tại p nguyên tố thỏa mãn $p + 2$ cũng nguyên tố và $p \mid (2^n - 1)$, $p + 2 \mid (2^n - 1)$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có p nguyên tố lẻ nên $p(p+2) \mid (2^{n+1} - 2)$. Vì n lẻ nên ta được 2 là số chính phương mod p , $p + 2$ suy ra $p \equiv 7 \pmod{8}$. Cặp nguyên tố $(p, p + 2)$ nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này là $(71, 73)$.

Gọi $h = \text{ord}_{71}(2)$ thì có $71 \mid (2^h - 1)$ suy ra $2 \nmid h$ dẫn tới $h \mid 35$ và do đó $h = 35$ (ta có thể xét để loại bỏ $h = 1, 5, 7$). Hoàn toàn tương tự, đặt $l = \text{ord}_{73}(2)$ thì ta cũng có $l = 9$ và từ đây ta có

$$\begin{cases} 71 \mid (2^n - 1) \\ 73 \mid (2^n - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 \mid n \\ 35 \mid n \end{cases} \Rightarrow (9 \cdot 35) \mid n.$$

Với kết quả này, ta suy ra $n_{\min} = 9 \cdot 35 = 315$. $\square$

Bài toán 9 (Mỹ, 2003). Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố (p, q, r) thỏa mãn:

$$\begin{cases} p \mid (q^r + 1) \\ q \mid (r^p + 1) \\ r \mid (p^q + 1) \end{cases}$$

Lời giải. Ta thấy các số p, q, r phân biệt. Ta sẽ chứng minh trong ba số này phải có một số bằng 2. Thật vậy, giả sử $p, q, r > 2$ thì ta có $p \mid (q^{2r} - 1)$. Đặt $h = \text{ord}_p(q)$ thì bằng cách sử dụng định lý Fermat ta có

$$\begin{cases} h \mid (p - 1) \\ h \mid 2r \\ h \nmid r \end{cases} \Rightarrow h = 2 \vee h = 2r.$$

Ta xét các trường hợp:

- $h = 2r$. Khi đó $2r \mid (p - 1)$ nên $p^q - 1 \equiv (1)^q - 1 \equiv 0 \pmod{r}$ suy ra:

$$r \mid [(p^q + 1) - (p^q - 1)],$$

hay ta có $r \mid 2$, vô lý.

- $h = 2$. Khi đó $p \mid (q^2 - 1)$ nên $p \mid (q - 1)$ hoặc $p \mid (q + 1)$. Nếu $p \mid (q + 1)$ thì q chẵn, vô lý. Nếu $p \mid (q - 1)$ thì có $q^r + 1 \equiv 2 \pmod{p}$ suy ra $p \mid 2$, vô lý.

Vậy điều giả sử là sai và một trong ba số p, q, r phải bằng 2. Có thể giả sử $p = 2$. Khi đó q, r lẻ và $q \mid (r^2 + 1)$ và $r \mid (2^q + 1)$. Đặt $t = \text{ord}_r(2)$ thì $t \mid 2q$, $t \nmid q$, $t \mid (r - 1)$. Nếu $t = 2q$ thì $q \mid (r - 1)$ nên $q \mid 2$, vô lý. Do đó $t = 2$ và ta có $r \mid (2^2 - 1)$ suy ra $r = 3$ và như thế $q = 5$.

Vậy nếu $p = 2$ thì $(p, q, r) = (2, 5, 3)$. Do đó tất cả các bộ cần tìm là:

$$(p, q, r) = (2, 5, 3), (3, 2, 5), (5, 3, 2).$$

Bài toán được giải quyết xong. $\square$

Bài toán 10 (Thổ Nhĩ Kỳ, 2013). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) sao cho:

$$2^n + (n - \varphi(n) + 1)! = n^m + 1.$$

Lời giải. Giả sử phân tích tiêu chuẩn của n và $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ với $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$. Ta thấy:

$$n - \varphi(n) + 1 = n \cdot \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1)}{p_1 p_2 \cdots p_k} - 1 > \frac{n}{p_1} - 1.$$

Nếu $k > 1$ và $a_1 > 2$ thì $n - \varphi(n) + 1 > p_1$. Ta xét phương trình đã cho theo $\text{mod } p_1$. Theo định lý Fermat ta có $p_1 \mid (2^n - 1)$, $p_1 \mid (2^{p_1-1} - 1)$, suy ra $\text{ord}_{p_1}(2) \mid (n, p_1 - 1)$ nên tồn tại số nguyên tố q sao cho $q \mid (n, p_1 - 1)$, vô lý vì p_1 nhỏ nhất. Do vậy chỉ xảy ra một trong hai khả năng $n = p \in \mathcal{P}$ hoặc $n = p^2, p \in \mathcal{P}$.

• $n = p$. Khi đó $2^p = n^m$ nên $m = n = p = 2$.

• $n = p^2$. Ta có

$$2^{p^2} + (p-1)! = p^{2m} + 1. \quad (*)$$

Nếu p lẻ thì xét $(*)$ theo $\text{mod } 8$, ta thấy vế phải của $(*)$ đồng dư 2 $(\text{mod } 4)$ và $8 \mid 2^{p^2}$ nên $8 \mid [(p-1)! - 2]$, không tồn tại p thỏa mãn.

Nếu $p = 2$ ta thấy có một cặp duy nhất là $(m, n) = (2, 4)$.

Vậy $(m, n) = (2, 2), (2, 4)$ là tất cả các cặp số cần tìm. $\square$

Bài toán 11 (Trung Quốc, 2006). Tìm tất cả cặp số nguyên dương (a, n) sao cho:

$$\frac{(a+1)^n - a^n}{n} \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải. Xét $n \geq 2$. Giả sử p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n . Khi đó $p \mid [(a+1)^n - a^n]$ suy ra $(a, p) = 1$ nên tồn tại $b \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ sao cho $ab \equiv 1 \pmod{p}$. Suy ra:

$$p \mid \left\{ [b(a+1)]^n - 1 \right\}.$$

Đặt $h = \text{ord}_p(ab + b)$ thì $h \mid n$, $h \mid (p-1)$ nên $h = 1$ do tính nhỏ nhất của p . Suy ra $p \mid (ab + b)$ và $p \mid ab$ do đó $p \mid 1$, vô lý. Với $n = 1$ ta có $a \in \mathbb{N}^*$ bất kỳ. Vậy $(a, n) = (a, 1), a \in \mathbb{N}^*$. $\square$

3.3. Bài tập tương tự

Bài tập 1 (Iran, 2007). Cho n là số nguyên dương và $n = 2^{2007}k + 1$ với k là số nguyên dương lẻ. Chứng minh rằng $n \nmid (2^{n-1} + 1)$.

Bài tập 2 (VMO, 2001). Cho n là số nguyên dương và a, b là các số nguyên tố cùng nhau lớn hơn 1. Giả sử p, q là hai ước lẻ lớn hơn 1 của $a^{6^n} + b^{6^n}$. Tìm số dư trong phép chia của $p^{6^n} + q^{6^n}$ cho $6 \cdot 12^n$.

Bài tập 3 (Trung Quốc, 2009). Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) sao cho $pq \mid (5^p + 5^q)$.

Bài tập 4 (Bulgaria, 1998). Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) sao cho $pq \mid (2^p + 2^q)$.

Bài tập 5 (Rumani, 2000). Cho $a > 1$ là số nguyên dương. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho 2^{2000} chia hết $a^n - 1$.

Bài tập 6 (Dự tuyển IMO, 2000). Xác định tất cả các bộ ba nguyên dương (a, m, n) sao cho $a^m + 1$ là ước của $(a+1)^n$.

Bài tập 7 (Dự tuyển IMO, 2003). Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên tố q sao cho với mọi số nguyên dương n thì $n^p - n$ không chia hết cho q .

Bài tập 8 (Dự tuyển IMO, 2006). Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1.$$

Bài tập 9. Cho m, n là hai số nguyên dương và p là số nguyên tố. Chứng minh rằng nếu m là ước nguyên tố lẻ của $n^p + 1$ thì $2p \mid (m-1)$ hoặc $m \mid (n^2 - 1)$.

Bài tập 10. Cho a, k là các số nguyên dương, p là số nguyên tố, $(a, p) = 1$. Tìm điều kiện của n để tồn tại a sao cho $p^k \mid (a^n + 1)$. Nếu tồn tại hãy tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Bài tập 11 (Nga, 1997). Với mỗi số nguyên dương a đặt $n_a = 101a - 100 \cdot 2^a$. Chứng minh rằng với $0 \leq a, b, c, d \leq 99, a, b, c, d \in \mathbb{N}$ sao cho $n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10100}$ thì:

$$\{a, b\} = \{c, d\}.$$

Bài tập 12 (Thổ Nhĩ Kỳ, 2007). Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố $p \geq 7$ thì tồn tại $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) số nguyên $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ không chia hết cho p thoả mãn hệ phương trình:

$$x_i^2 + y_i^2 \equiv x_{i+1}^2 \pmod{p}, \quad \forall i = \overline{1, n}, x_{n+1} = x_1.$$

Bài tập 13. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng mọi ước nguyên dương của số $\frac{2^p + 1}{3}$ đều có dạng $2kp + 1$, ($k \in \mathbb{N}^*$).

Tài liệu tham khảo

- [1] Hà Huy Khoái, *Số học*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [2] Nguyễn Vũ Lương (chủ biên), *Các bài giảng về Số học*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [3] Titu Andresscu, Dorin Andrica, *Diophantine Equations*, GIL Publishing House, 2002.
- [4] Titu Andresscu, Răzvan Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, 2001.
- [5] Titu Andresscu, Bogdan Endescu, *Mathematical Olympiad Treasures*, Birkhäuser, 2004.
- [6] Tạp chí Mathematical Reflections.
- [7] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ RỜI RẠC VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Dương Đức Lâm[†]

1. Nguyên lý cực trị rời rạc

Nguyên lý cực trị rời rạc (mà trong bài viết này nhiều khi chúng ta sẽ gọi tắt là nguyên lý cực trị) là một trong những nguyên lý cơ bản của Toán học sơ cấp. Phát biểu của nó rất đơn giản:

Trong một tập hợp khác rỗng và hữu hạn các số thực luôn:

- (i) tồn tại một số bé nhất và một số lớn nhất;
- (ii) có thể sắp xếp chúng theo một trật tự tăng dần hoặc giảm dần.

Mặc dù được phát biểu đơn giản như vậy nhưng nguyên lý cực trị rời rạc lại có rất nhiều ứng dụng trong việc giải quyết nhiều bài toán rời rạc có yếu tố cực trị và cả các bài toán không rời rạc. Sau đây chúng tôi sẽ trình bày một số ví dụ cơ bản minh họa cho ba ứng dụng thường gặp nhất của nguyên lý: *Chứng minh sự tồn tại của cấu hình, Tìm cực trị rời rạc và Thiết lập thứ tự trên các yếu tố bình đẳng*. Việc tìm tòi sáng tạo thêm các ví dụ hay khai thác thêm các ứng dụng khác xin được dành cho bạn đọc.

2. Một số ứng dụng của nguyên lý cực trị rời rạc

2.1. Chứng minh sự tồn tại của cấu hình

Xuất phát từ nhiều bài toán thực tế, để tách một cá thể ra khỏi một đám đông, người ta thường đưa ra một tiêu chí nào đó sao cho

[†]Trường THPT Chuyên, Đại học Sư phạm Hà Nội.

ứng với tiêu chí đó thì đối tượng cần tách là nổi trội nhất. Cũng vậy, khi chứng minh các bài toán sự tồn tại của một cấu hình bằng nguyên lý cực trị, ta cần đặt ra một quan hệ thứ tự nào đó, mà cấu hình nếu tồn tại sẽ là một đối tượng cực trị.

Chúng ta cùng bắt đầu với ví dụ sau:

Ví dụ 1. Trên một bàn cờ vua cỡ $n \times n$, ta đặt các quân xe thỏa mãn điều kiện sau: nếu có một ô nào đó không có quân xe thì tổng số các quân xe đứng cùng hàng và cùng cột với ô đó không nhỏ hơn n . Chứng minh rằng số quân xe trên bàn cờ không ít hơn $\frac{n^2}{2}$.

Chứng minh. Vì số đường gồm hàng và cột trên bàn cờ là hữu hạn nên tồn tại một đường N (giả sử là hàng) có số quân xe nhỏ nhất. Giả sử số quân xe trên N là k . Khi đó trên hàng N có $n - k$ ô không có quân xe. Từ giả thiết suy ra trên mỗi cột chứa một ô như thế có ít nhất $n - k$ quân xe. Như vậy các cột này chứa ít nhất $(n - k)^2$ quân xe.

Do tính nhỏ nhất của k , trên k cột còn lại mỗi cột phải chứa ít nhất k quân xe, do đó số quân xe trên k cột này không ít hơn k^2 . Vậy số quân xe trên bàn cờ không ít hơn $(n - k)^2 + k^2$. Kết hợp với bất đẳng thức $(n - k)^2 + k^2 \geq \frac{n^2}{2}$, ta suy ra kết luận của bài toán. $\square$

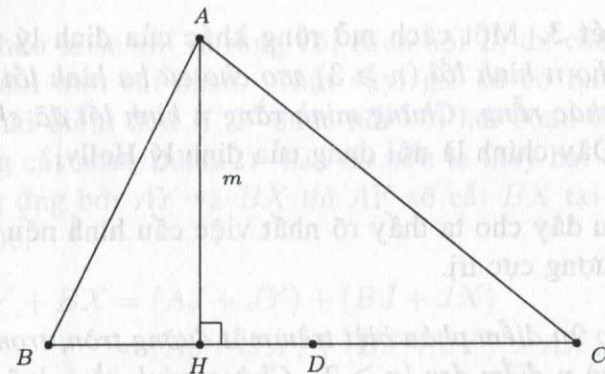
Trong bài này, đối tượng cực trị chính là số quân xe. Tuy nhiên không phải lúc nào đối tượng cực trị cũng xuất hiện rõ ràng mà chính chúng ta phải tạo ra nó. Bài toán sau đây, do Sylvester[†] đưa ra vào năm 1893, cho ta thấy rõ điều đó.

Ví dụ 2 (Định lý Sylvester-Gallai[§]). Trên mặt phẳng cho m ($n \geq 3$) điểm. Biết rằng mỗi đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ đều đi qua một điểm thứ ba. Chứng minh rằng n điểm đã cho cùng nằm trên một đường thẳng.

[†]James Joseph Sylvester (1814-1897), nhà Toán học Anh có nhiều đóng góp cho Lý thuyết ma trận, Lý thuyết số và Tổ hợp.

[§]Tibor Gallai (1912-1992), nhà Toán học Hungary, một trong những người đầu tiên chứng minh giả thuyết của Sylvester. Ông là thầy của László Lovász, người sau này là thầy của GS Vũ Hà Văn.

Chứng minh. Giả sử phản chứng, khi đó với mỗi điểm A bất kỳ thuộc S là tập n điểm đã cho, luôn tồn tại đường thẳng đi qua hai điểm nào đó trong số các điểm còn lại nhưng không đi qua A . Xét M là tập tất cả các khoảng cách từ mỗi điểm A đến các đường thẳng đi qua hai điểm trong số các điểm còn lại nhưng không đi qua A . Do M là hữu hạn nên theo nguyên lý cực trị rời rạc, tồn tại một khoảng cách ngắn nhất $m \in M$. Giả sử $m = d(A, (BC))$. Kẻ $AH \perp BC$.



Nếu $H \in S$ thì

$$d(H, (AB)) < AH = d(A, (BC)),$$

mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của m . Như vậy $H \notin S$. Theo giả thiết, đường thẳng BC phải chứa thêm một điểm $D \in S$. Giả sử C, D nằm cùng phía đối với H . Khi đó:

$$d(A, (BC)) = AH > d(H, (AC)) > \min \{d(D, (AC)), d(C, (AD))\},$$

ta lại nhận được mâu thuẫn. Vậy n điểm đã cho thẳng hàng. $\square$

Nhận xét 1. Định lý Sylvester-Gallai có một phát biểu đối ngẫu thú vị như sau: Trong mặt phẳng cho n đường thẳng ($n \geq 3$), trong đó hai đường thẳng bất kỳ đều cắt nhau và qua mỗi giao điểm có không ít hơn ba đường thẳng đi qua. Chứng minh tất cả các đường thẳng đó đều đi qua một điểm.

Nhận xét 2. Định lý Sylvester-Gallai cũng có thể mở rộng trong không gian, ở đó, điểm có thể giữ nguyên hoặc coi như siêu phẳng trong mặt phẳng, ta nhận được hai bài toán tương tự trong không gian:

1. Trong không gian cho $n \geq 4$ điểm. Biết rằng một mặt phẳng chứa ba điểm bất kỳ đều chứa thêm điểm thứ tư. Chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho đồng phẳng.
2. Trong không gian cho $n \geq 3$ đường thẳng. Biết rằng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng bất kỳ thì đều chứa thêm một đường thẳng thứ ba. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng đã cho đồng phẳng.

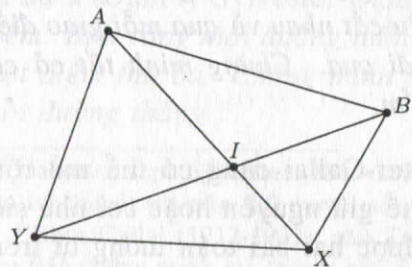
Nhận xét 3. Một cách mở rộng khác của định lý Sylvester-Gallai là: Cho n hình lồi ($n \geq 3$) sao cho cứ ba hình lồi bất kỳ có thì có giao khác rỗng. Chứng minh rằng n hình lồi đã cho có giao khác rỗng. Đây chính là nội dung của định lý Helly.

Ví dụ sau đây cho ta thấy rõ nhất việc cấu hình nếu tồn tại sẽ là một đối tượng cực trị.

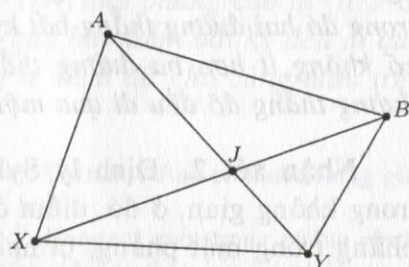
Ví dụ 3. Cho $2n$ điểm phân biệt trên một đường tròn, trong đó có n điểm trắng và n điểm đen ($n \geq 2$). Chứng minh rằng luôn tồn tại:

- (a) một cách nối tất cả các điểm trắng với các điểm đen bởi n đoạn thẳng sao cho các đoạn thẳng không có điểm chung;
- (b) một cách nối tất cả các điểm trắng với các điểm đen bởi n đoạn thẳng sao cho các đoạn thẳng từng đôi một cắt nhau.

Chứng minh. Gọi S là tập tất cả các cách nối các điểm trắng với các điểm đen bởi n đoạn thẳng. Khi đó S hữu hạn và khác rỗng. Theo nguyên lý cực trị sẽ tồn tại: một cách nối N có tổng độ dài các đoạn nối nhỏ nhất và một cách nối L có tổng độ dài các đoạn nối lớn nhất.



Hình 1



Hình 2

Ta sẽ chứng minh với cách nối N thì các đoạn thẳng nối không có điểm chung. Thật vậy giả sử trái lại là tồn tại hai điểm trắng A, B và hai điểm đen X, Y mà đoạn AX cắt BY tại I (hình 1). Khi đó, nếu ta thay hai đoạn AX và BY tương ứng bởi AY và BX , các đoạn khác giữ nguyên, thì do $BX + AY < (BI + IX) + (AI + IY) = BY + AX$ nên ta được một cách nối khác có tổng các đoạn nối nhỏ hơn tổng các đoạn nối của N , mâu thuẫn với định nghĩa của N . Vậy N thỏa mãn (a).

Tiếp theo ta sẽ chỉ ra rằng với cách nối L , thì các đoạn thẳng nối từng đôi một cắt nhau. Thật vậy, giả sử có hai điểm trắng A, B và hai điểm đen X, Y được nối bởi hai đoạn thẳng AX và BY không cắt nhau (hình 2). Khi đó nếu ta thay hai đoạn AX và BY tương ứng bởi AY và BX thì AY sẽ cắt BX tại một điểm J nào đó. Do:

$$\begin{aligned} AY + BX &= (AJ + JY) + (BJ + JX) \\ &= (AJ + JX) + (BJ + JY) > AX + BY, \end{aligned}$$

ta nhận được một cách nối mới có tổng các đoạn nối lớn hơn tổng các đoạn nối của L , mâu thuẫn với định nghĩa của L . Kết luận (b) được thỏa mãn. $\square$

Ví dụ 4. Trên một đường thẳng đánh dấu $n \geq 4$ điểm phân biệt $A_1, A_2, \dots, A_n$ theo thứ tự từ trái qua phải. Mỗi điểm được tô bằng một trong 4 màu khác nhau và cả 4 màu đều được dùng. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng chứa đúng hai điểm của hai màu và ít nhất hai điểm của hai màu còn lại.

Chứng minh. Xét tập:

$$A = \{1 \leq k \leq n \mid \text{Các điểm } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ được tô bằng đủ 4 màu}\}.$$

Vì $n \in A$ nên A khác rỗng. Mặt khác, A hữu hạn nên theo nguyên lý cực trị rời rạc, tồn tại chỉ số i nhỏ nhất thuộc A . Theo định nghĩa của A và tính chất của chỉ số i , suy ra màu của A_i khác với màu của tất cả các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$. Chú ý rằng bây giờ trong dãy $A_1, A_2, \dots, A_i$ có đủ 4 màu. Ta xét tiếp tập:

$$B = \{1 \leq k \leq i \mid \text{Các điểm } A_k, A_{k+1}, \dots, A_i \text{ được tô bằng đủ 4 màu}\}.$$

Do $1 \in \mathcal{B}$ nên $\mathcal{B}$ khác rỗng. Đồng thời $\mathcal{B}$ hữu hạn nên theo nguyên lý cực trị, tồn tại chỉ số j lớn nhất thuộc $\mathcal{B}$. Theo định nghĩa của $\mathcal{B}$ và tính chất của chỉ số j , suy ra màu của A_j sẽ khác với màu các điểm $A_{j+1}, \dots, A_i$. Xét đoạn $[A_i, A_j]$ thì đoạn này chứa đúng hai điểm của hai màu là A_i, A_j , và ít nhất hai điểm của hai màu còn lại. Đó là điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 5. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho bất đẳng thức $\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k)}{k}$ thỏa mãn với mọi $k = 1, 2, \dots, n-1$, trong đó $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước số dương của n .

Chứng minh. Đặt $a_n = \frac{\sigma(n)}{n}$. Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên dương n thỏa mãn bất đẳng thức $a_n > a_k$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n-1$. Gọi N là số lớn nhất trong các số n thỏa mãn điều này. Với mỗi số nguyên dương n , đặt:

$$A_n = \max\{a_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

Khi đó, $A_n = a_n$. Hơn nữa, do tính lớn nhất của N ,

$$A_{n+1} = \max\{A_N, a_{N+1}\} = A_N.$$

Suy ra $A_N = A_{N+1} = A_{N+2} = \dots$. Từ đó $a_n \leq a_N$ với mọi $n \geq N$. Mặt khác, tập các ước số dương của $2N$ chứa số 1 và tất cả các số dạng $2d$, với d là ước số dương của n . Do đó:

$$\sigma(2N) \geq 2\sigma(N) + 1,$$

suy ra

$$a_{2N} \geq \frac{2\sigma(N) + 1}{2N} = a_N + \frac{1}{2N},$$

mâu thuẫn với tính chất của số N . Điều này có nghĩa giả thiết phản chứng là sai và ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài tập đề nghị

Bài tập 1. Trên mặt phẳng cho $n \geq 3$ điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn đi qua ba điểm mà không chứa điểm còn lại nào bên trong.

Bài tập 2. Trong các ô của một bảng vuông kích thước $n \times n$, người ta viết các số sao cho tổng các số trong các ô của một "chữ thập" (tức hình gồm một hàng và một cột) bất kỳ không nhỏ hơn a . Tìm cách viết sao cho tổng N của tất cả các số trong bảng là nhỏ nhất.

Bài tập 3. Trên mặt phẳng có 2013 điểm, khoảng cách giữa các điểm này đôi một khác nhau. Nối mỗi điểm trong số 2013 điểm này với điểm gần nó nhất. Với cách nối đó có nhận được một đường gấp khúc khép kín không?

Bài tập 4. Cho một hình phẳng F có diện tích 1 được phủ bởi một số hữu hạn hình tròn. Chứng minh rằng trong số các hình tròn đó có thể chọn ra một hình tròn có diện tích không nhỏ hơn $\frac{1}{9}$ hoặc một số hình tròn rời nhau sao cho tổng diện tích của chúng không nhỏ hơn $\frac{1}{9}$.

Bài tập 5. Trên mặt phẳng cho $2n+1$ đường thẳng ($n \in \mathbb{N}^*$). Chúng cắt nhau tạo thành các tam giác. Chứng minh rằng số các tam giác nhọn tạo thành không vượt quá $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Bài tập 6. Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Ký hiệu $h(n)$ là ước số nguyên tố lớn nhất của n . Hỏi tập hợp các số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện:

$$h(n) < h(n+1) < h(n+2)$$

có là tập vô hạn hay không?

Bài tập 7. Đánh dấu một cách ngẫu nhiên n^2 ô vuông con của một bảng kích thước $n \times 2n$ ($n \geq 2$). Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k mà $1 < k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, luôn tồn tại k hàng sao cho bảng ô vuông kích thước $k \times 2n$ được tạo thành từ k hàng đó có không ít hơn:

$$\frac{k! \cdot (n - 2k + 2)}{(n - k + 1)(n - k + 2) \cdots (n - 1)}$$

cột chỉ gồm các ô được đánh dấu.

2.2. Tìm cực trị rời rạc

Khi làm việc với các bài toán bất đẳng thức và cực trị với các biến thực, thường có một điều kiện nào đó để xảy ra dấu bằng. Chẳng hạn, bất đẳng thức Cauchy:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

có đẳng thức khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Điều này đạt được do đường thẳng thực là liên tục. Với các biến là rời rạc, điều kiện này không còn được đảm bảo. Bởi thế tìm cực trị rời rạc luôn là một vấn đề rất khó và rất thiếu công cụ. Ở mảnh đất này, các bất đẳng thức cổ điển không còn giữ vị thế “thượng phong”. Quan trọng hơn, nơi đây sức mạnh của Giải tích Toán học (với đối tượng là các yếu tố liên tục) hoàn toàn bị vô hiệu hóa.

Để thấy rõ hơn, chúng ta hãy cùng bắt đầu bằng ví dụ sau:

Ví dụ 6. Cho m và n là các số nguyên với $m \geq n \geq 2$. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các biến nguyên dương sao cho $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Lời giải. Với bài toán này, do chưa quen xử lý cực trị với các biến rời rạc, trước hết ta hãy tạm quên đi tính chất rời rạc của các biến, nghĩa là xét bài toán với các biến là thực. Khi đó từ bất đẳng thức cơ bản và quen thuộc:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2,$$

ta có nhận xét rằng giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{m^2}{n}$, đạt được khi các biến bằng nhau. Bây giờ hãy quay lại với các biến rời rạc, rõ ràng nhận xét này không còn đúng, tuy nhiên, nó cũng cho ta một cảm nhận “mơ hồ” rằng, giá trị nhỏ nhất của S sẽ đạt được khi các biến “đủ gần” nhau.

Ta sẽ đi chứng minh phỏng đoán này bằng nguyên lý cực trị. Gọi G là tập tất cả các giá trị của S . Ta có G khác rỗng và hữu hạn

nên theo nguyên lý cực trị rời rạc, luôn tồn tại N là số nhỏ nhất của G . Giả sử $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ làm cho S nhận giá trị N . Ta sẽ chứng minh rằng các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ chỉ hơn kém nhau tối đa là 1. Thật vậy, giả sử chẳng hạn $a_1 - a_2 = a > 1$. Khi đó lấy $a = a_1 - 1$ và $b = a_2 + 1$, thì $a_1 + a_2 = a + b$ và $a^2 + b^2 < a_1^2 + a_2^2$.

Như vậy ta tìm được các số nguyên dương $a, b, a_3, \dots, a_n$ thỏa mãn $a + b + a_3 + \dots + a_n = m$ và làm cho giá trị của S nhỏ hơn N , điều này mâu thuẫn. Bây giờ giả sử $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ và $m = dn + k$ với $k < n$ nguyên không âm. Do đặc điểm của dãy $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ và mỗi số hơn kém nhau tối đa 1 đơn vị, ta suy ra $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-k} = d$ còn $a_{n-k+1} = \dots = a_n = d + 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $N = (n - k)d^2 + k(d + 1)^2$. $\square$

Nhận xét 1. Rõ ràng chìa khóa của lời giải nằm ở chỗ nhận ra được giá trị nhỏ nhất của S chỉ đạt được khi các biến hơn kém nhau tối đa là 1. Bằng cách “liên tục hóa” bài toán ta đã đi đến dự đoán trên. Các bạn thấy đấy, tuy các biến là rời rạc hay liên tục thì tính chất của hàm số vẫn có mối quan hệ khăng khít với nhau!

Nhận xét 2. Với lập luận tương tự, ta cũng tìm được giá trị lớn nhất của S là $(m - n + 1)^2 + n - 1$, đạt được khi một biến bằng $m - n + 1$ và các biến còn lại bằng 1. Lời giải chi tiết của phần này xin dành cho bạn đọc.

Nhận xét 3. Bài toán có thể tổng quát hóa như sau: Cho x_i ($i = \overline{1, n}$) là các số nguyên dương có tổng bằng $m \geq n$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ với k là một số thực tùy ý.

Ví dụ 7. Cho m là một số nguyên lớn hơn 3 và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các biến nguyên dương sao cho $x_1 x_2 \dots x_n = m$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3.$$

Lời giải. Gọi G là tập tất cả các giá trị của S . Ta có G hữu hạn và khác rỗng. Theo nguyên lý cực trị rời rạc, tồn tại L là giá trị lớn nhất của G . Giả sử $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ làm cho S nhận giá trị L . Ta sẽ chứng minh rằng các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ có một số là m , còn tất cả các số khác là 1.

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Ta cần chỉ ra $a_1 = m$. Giả sử $a_1 < m$. Khi đó $a_2 > 1$. Đặt $a = a_1 a_2$, $b = 1$, thì ta có $aba_3 \dots a_n = m$ và:

$$a^3 + b^3 = (a_1 a_2)^3 + 1 \geq a_1^3 + a_2^3.$$

Như vậy ta tìm được các số nguyên dương $a, b, a_3, \dots, a_n$ vẫn có tích bằng m nhưng làm cho giá trị của S lớn hơn L , mâu thuẫn. Vậy $a_1 = m$ và do đó $a_2 = \dots = a_n = 1$. Cuối cùng giá trị lớn nhất của S là $L = m^3 + n - 1$. $\square$

Nhận xét. Bài toán tổng quát cho ví dụ này là: Với x_i ($i = \overline{1, n}$) là các số nguyên dương có tích bằng m , k là số thực cho trước, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$.

Ví dụ 8. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2014$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S(a, b, c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Lời giải. Trước hết, nếu các biến a, b, c là các số thực dương thì bởi bất đẳng thức Nesbitt ta nhận được ngay giá trị nhỏ nhất của $S(a, b, c)$ là $S\left(\frac{2014}{3}, \frac{2014}{3}, \frac{2014}{3}\right)$ khi ba biến bằng nhau. Từ đây ta có thể dự đoán rằng giá trị nhỏ nhất của $S(a, b, c)$ khi a, b, c nguyên dương cũng chỉ xảy ra khi (a, b, c) không cách nhau quá xa, cụ thể là chỉ hơn kém nhau tối đa là 1.

Ta sẽ chứng minh dự đoán của ta là đúng. Thật vậy, do chỉ có hữu hạn bộ số nguyên dương a, b, c để $a + b + c = 2014$ nên tồn tại một bộ (a_0, b_0, c_0) để $S_0 = S(a_0, b_0, c_0)$ là giá trị nhỏ nhất của $S(a, b, c)$. Coi $a_0 \leq b_0 \leq c_0$, ta chứng minh $c_0 \leq a_0 + 1$. Giả sử ngược lại, $c_0 \geq a_0 + 2$. Xét bộ $a_1 = a_0 + 1, b_1 = b_0, c_1 = c_0 - 1$ và lập tổng:

$$S_1 = \frac{a_1}{b_1+c_1} + \frac{b_1}{c_1+a_1} + \frac{c_1}{a_1+b_1}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} S_1 - S_0 &= \frac{a_0 + 1}{b_0 + c_0 - 1} + \frac{c_0 - 1}{a_0 + 1 + b_0} - \frac{a_0}{b_0 + c_0} - \frac{c_0}{a_0 + b_0} \\ &= (a_0 + b_0 + c_0) \left[\frac{1}{(b_0 + c_0)(b_0 + c_0 - 1)} - \frac{1}{(a_0 + b_0)(a_0 + b_0 + 1)} \right] < 0, \end{aligned}$$

mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của S_0 . Vậy $a_0 \leq b_0 \leq c_0 \leq a_0 + 1$, kết hợp với $a_0 + b_0 + c_0 = 2014$ ta tìm được $(a_0, b_0, c_0) = (671, 671, 672)$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức là:

$$S_0 = \frac{1342}{1343} + \frac{672}{1342}.$$

Ví dụ 9. Cho các số dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thỏa mãn các điều kiện:

(i) $2a_i$ là số nguyên dương với $i = \overline{1, 5}$;

(ii) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 99$.

Tìm giá trị lớn nhất của $S = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$. Hãy mở rộng bài toán.

Lời giải. Gọi G là tập tất cả các giá trị của S . Để thấy G hữu hạn và khác rỗng. Do đó theo nguyên lý cực trị rời rạc thì luôn tồn tại L là số lớn nhất của G . Ta sẽ chứng minh nếu bộ số $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ làm cho giá trị của S bằng L thì các số trong bộ chỉ hơn kém nhau tối đa 0.5.

Thật vậy, giả sử chẳng hạn $a_1 - a_2 = x > 0.5$. Khi đó lấy $a = a_1 - 0.5$ và $b = a_2 + 0.5$ thì $2a, 2b$ là các số nguyên và $a_1 + a_2 = a + b$, đồng thời:

$$ab = (a_1 - 0.5)(a_2 + 0.5) = a_1 a_2 + 0.5 \cdot (x - 0.5) > a_1 a_2.$$

Vậy ta tìm được bộ số (a, b, a_3, a_4, a_5) thỏa mãn các điều kiện (i) – (ii) và làm cho giá trị của S lớn hơn L , mâu thuẫn. Vậy các số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 hơn kém nhau tối đa là 0.5.

Bây giờ giả sử $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ mà do $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 99$ ta suy ra ngay $a_1 = a_2 = 19.5$ và $a_3 = a_4 = a_5 = 20$. Vậy giá trị lớn nhất của S là $L = (19.5)^2 \cdot 20^3$. Việc mở rộng bài toán xin dành cho bạn đọc. $\square$

Qua các ví dụ trên, ta thấy, để xử lý các bài toán cực trị rời rạc thì gần như luôn luôn phải dự đoán được dấu bằng xảy ra tại điểm nào. Lập luận tiếp theo là chỉ ra bằng phản chứng rằng, nếu các biến bị lệch khỏi điểm mà ta dự đoán thì tại đó giá trị biểu thức không còn là giá trị cực trị nữa. Tuy nhiên, có rất nhiều bài toán cực trị rời rạc mà chúng ta chỉ có thể tìm ra một quy trình để tìm điểm cực trị chứ rất khó để xác định cụ thể điểm đó. Bài toán sau đây là một ví dụ như thế, bạn đọc hãy thử sức để hiểu điều chúng tôi muốn nói.

Ví dụ 10. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $a_1 a_2 \cdots a_n = n!$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = a_1^5 + a_2^5 + \cdots + a_n^5.$$

Đặc điểm chỉ có hữu hạn giá trị của biểu thức rời rạc và nguyên lý cực trị cho ta một nhận xét quan trọng, đó là một biểu thức với các biến rời rạc luôn luôn tồn tại giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất. Từ đây, ta có thể rời rạc hóa nhiều bài toán bất đẳng thức và cực trị thông thường để nhận được các bài toán cực trị rời rạc hay và khó.

Bài tập đề nghị

Bài tập 8. (a) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng n số tự nhiên có tích bằng m cho trước.

(b) Tìm giá trị lớn nhất của tích n số tự nhiên có tổng bằng m cho trước.

Bài tập 9. Cho m và n là các số nguyên với $m \geq n \geq 2$. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các biến nguyên dương sao cho $x_1 + \cdots + x_n = m$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n.$$

Bài tập 10. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}$ biết rằng a_i ($i = \overline{1, n}$) là các số nguyên dương:

(a) có tổng bằng $m \geq n$ cho trước;

(b) có tích bằng $m \geq n$ cho trước.

Bài tập 11. Cho m và n là các số nguyên với $m \geq n \geq 2$. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các biến nguyên dương sao cho $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Bài tập 12. Cho a, b, c là các số nguyên dương có tổng bằng 2014. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (ab + bc + ca) \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right].$$

Bài tập 13. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các biến nguyên dương có tích là $n!$, k là số thực cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$.

2.3. Thiết lập thứ tự trên các yếu tố bình đẳng

Khi đối mặt với các bài toán mà các biến là bình đẳng với nhau (nghĩa là nếu đổi chỗ các biến cho nhau thì cách phát biểu của bài toán vẫn không thay đổi), chúng ta có thể sắp thứ tự các biến theo một trật tự tăng hoặc giảm. Việc làm này tuy có vẻ đơn giản, nhưng hiệu quả mang lại thì rất rõ ràng: một mặt có thể vận dụng quan hệ thứ tự để làm cho lời giải thêm sắc bén, mặt khác lại giảm đi rất nhiều trường hợp phải xét trong bài toán.

Chúng ta hãy bắt đầu bằng một bài toán đơn giản:

Ví dụ 11. Chứng minh rằng trong 50 số nguyên dương phân biệt bất kỳ nhỏ hơn 100 luôn có hai số nguyên tố cùng nhau.

Chứng minh. Sắp xếp 50 số nguyên dương đó theo một thứ tự tăng dần $x_1 < x_2 < \dots < x_{50}$. Nếu trong dãy trên có hai số nguyên dương liên tiếp thì đó chính là hai số nguyên tố cùng nhau. Nếu trái lại, ta có $x_{50} \geq x_1 + 2 \cdot 49 \geq 99$, mà $x_{50} < 100$ nên dấu bằng xảy ra. Suy ra dãy đã cho là dãy các số lẻ liên tiếp từ 1 đến 99. Đương nhiên dãy này luôn có hai số nguyên tố cùng nhau, chẳng hạn 1 và 3. Đó là điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 12. Cho A là một tập hữu hạn các số nguyên thỏa mãn điều kiện:

(i) số bé nhất trong A là 1, số lớn nhất trong A là 100;

(ii) nếu $x \in A \setminus \{1\}$ thì tồn tại $a, b \in A$ để $x = a + b$.

Hỏi tập A có ít nhất bao nhiêu phần tử?

Lời giải. Giả sử $A = \{k_i\}_{i=1}^n$ với $1 = k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n = 100$. Theo giả thiết, với mỗi $m > 1$, tồn tại $1 \leq i \leq j < m$ sao cho $k_m = k_i + k_j$. Từ đó:

$$2k_1 \geq k_2,$$

$$2k_2 \geq k_3,$$

$$\dots,$$

$$2k_{n-1} \geq k_n.$$

Suy ra

$$2^{n-1} = 2^{n-1}k_1 \geq k_n = 100,$$

hay $n \geq 8$. Với $n = 8$ ta có $k_8 = 100$, suy ra $k_7 \geq 50$. Nếu $k_7 > 50$ thì $k_6 + k_7 \geq k_8 = 100$, vô lý do $k_6 + k_7 \leq 2^5 + 2^6 = 96$. Vậy $k_7 = 50$. Tương tự, $k_6 = 25$, suy ra $2k_5 \neq k_6$ và $k_4 + k_5 \geq k_6 = 25$, tuy nhiên $k_4 + k_5 \leq 2^3 + 2^4 = 24$, mâu thuẫn. Như vậy, không có tập 8 phần tử nào thỏa mãn đề bài. Với $n = 9$, ta kiểm tra trực tiếp tập $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 24, 25, 50, 100\}$ thỏa mãn. Vậy tập A có ít nhất 9 phần tử. $\square$

Việc sắp thứ tự các biến không chỉ hữu ích khi làm việc với các số nguyên mà còn với cả các biến thực. Rất nhiều bài toán bất đẳng thức và cực trị được giải quyết nhanh chóng nhờ sắp thứ tự các biến. Dưới đây ta sẽ xét một số ví dụ điển hình.

Ví dụ 13 (Mỹ, 2000). Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max \left\{ \left(\sqrt{a} - \sqrt{b} \right)^2, \left(\sqrt{b} - \sqrt{c} \right)^2, \left(\sqrt{c} - \sqrt{a} \right)^2 \right\}.$$

Lời giải. Do các biến a, b, c hoàn toàn bình đẳng nên ta có thể giả sử $a \leq b \leq c$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng:

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \leq 3(\sqrt{c} - \sqrt{a})^2. \quad (1)$$

Đặt $f(b) = a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} - 3(\sqrt{c} - \sqrt{a})^2$, $b \in [a, c]$. Dễ thấy $f''(b) > 0$ nên $f(b)$ là một hàm lồi, suy ra giá trị lớn nhất của $f(b)$ sẽ đạt được tại biên: khi $b = a$ hoặc $b = c$. Do vai trò của a và c trong bất đẳng thức (1) là như nhau nên ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp $a = b$ là đủ. Khi đó (1) có thể viết lại thành:

$$a + 2c + 3\sqrt[3]{a^2c} \geq 6\sqrt{ac},$$

nhưng bất đẳng thức này luôn đúng theo AM-GM. $\square$

Nhận xét. Một cách hình ảnh, bất đẳng thức trên cho ta một “chặn trên” của đại lượng:

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}.$$

Không mấy khó khăn, chúng ta có thể chứng minh được “chặn dưới” của nó là:

$$\frac{1}{2} \min \left\{ \left(\sqrt{a} - \sqrt{b} \right)^2, \left(\sqrt{b} - \sqrt{c} \right)^2, \left(\sqrt{c} - \sqrt{a} \right)^2 \right\}.$$

Đây chính là trường hợp riêng của bài toán MOSP 2000: Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{1}{2} \min_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \left(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j} \right)^2 \right\}.$$

Một cách tự nhiên, liệu ta có thể mở rộng bài toán chặn trên cho n biến? Chúng tôi dự đoán rằng kết quả tổng quát sau đây cũng đúng: Với mọi số thực không âm a_i ($i = \overline{1, n}$), ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{n-1}{2} \max_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \left(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j} \right)^2 \right\}.$$

Ví dụ 14. Cho a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 là các số thực thỏa mãn điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1$. Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của $(a_i - a_j)^2$ với $i \neq j$ không vượt quá $\frac{1}{10}$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$. Đặt:

$$x = \min\{a_j - a_i : 1 \leq i < j \leq 5\}.$$

Ta chỉ xét $x > 0$. Khi đó $a_{i+1} - a_i \geq x > 0$ với mọi $i = \overline{1, 4}$. Với $j > i$, ta có

$$a_j - a_i = (a_j - a_{j-1}) + (a_{j-1} - a_{j-2}) + \dots + (a_{i+1} - a_i) \geq (j - i)x.$$

Do đó $(a_j - a_i)^2 \geq (j - i)^2 x^2$. Lấy tổng hai vế theo i, j ta nhận được

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (j - i)^2 x^2 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 5} (a_j - a_i)^2.$$

Vế trái của bất đẳng thức trên:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (j - i)^2 x^2 = x^2 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} (j - i)^2 = 50x^2,$$

còn vế phải:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (a_j - a_i)^2 = 5 \sum_{i=1}^5 a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^5 a_i \right)^2 \leq 5.$$

Suy ra

$$50x^2 \leq 5.$$

Vậy $x^2 \leq \frac{1}{10}$. Đó là điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Một câu hỏi được dành cho bạn đọc là, $\frac{1}{10}$ đã phải là hằng số tốt nhất của bài toán trên hay chưa? Ngoài ra, hãy giải quyết bài toán tổng quát: Với x_i ($i = \overline{1, n}$) là các số thực có tổng bình phương bằng 1, hãy tìm số dương nhỏ nhất C để bất đẳng thức sau được thỏa mãn:

$$\min\{(a_i - a_j)^2 : i \neq j\} \leq C.$$

Ví dụ 15. Cho $x_1, x_2, \dots, x_{672}$ là các số thực đôi một khác nhau thuộc khoảng $(0, 1)$. Chứng minh rằng tồn tại một cặp số (x_i, x_j) sao cho:

$$0 < x_i x_j (x_i - x_j) < \frac{1}{2013}.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng:

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{672} < 1.$$

Với mỗi $i = \overline{1, 671}$, đặt $a(i) = x_{i+1} x_i (x_{i+1} - x_i)$. Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$3a(i) = 3x_{i+1} x_i (x_{i+1} - x_i) < (x_{i+1}^2 + x_{i+1} x_i + x_i^2)(x_{i+1} - x_i) = x_{i+1}^3 - x_i^3.$$

Lấy tổng theo i , ta được

$$\sum_{i=1}^{671} 3a(i) < \sum_{i=1}^{671} (x_{i+1}^3 - x_i^3) = x_{672}^3 - x_1^3.$$

Từ đánh giá này, chọn chỉ số i để $a(i)$ nhỏ nhất, thì

$$671 \cdot 3a(i) < x_{672}^3 - x_1^3 < 1,$$

suy ra $a(i) = x_{i+1} x_i (x_{i+1} - x_i) < \frac{1}{2013}$, ta nhận được điều phải chứng minh. $\square$

Bài tập đề nghị

Bài tập 14. Chứng minh rằng, từ 25 số nguyên dương khác nhau có thể chọn ra hai số, sao cho các số còn lại không thể bằng tổng hoặc hiệu của hai số vừa chọn.

Bài tập 15 (Baltic Way, 2012). Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca + \max\{|a - b|, |b - c|, |c - a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a + b + c)^2.$$

Bài tập 16. Cho a, b, c, d là các số thực đôi một khác nhau. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} |a-b|y + |a-c|z + |a-d|t = 1 \\ |b-a|x + |b-c|z + |b-d|t = 1 \\ |c-a|x + |c-b|y + |c-d|t = 1 \\ |d-a|x + |d-b|y + |d-c|z = 1 \end{cases}$$

Bài tập 17. Với mỗi số nguyên $n \geq 3$, xét mệnh đề $S(n)$ như sau: “Với mọi số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ đều xảy ra bất đẳng thức:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \cdots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \cdots (a_2 - a_n) + \cdots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1}) \geq 0.”$$

Chứng minh rằng $S(n)$ chỉ đúng khi $n = 3$ hoặc $n = 5$.

Bài tập 18. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Bài tập 19 (Dự tuyển IMO, 2001). Gọi $A = (a_1, a_2, \dots, a_{2001})$ là một dãy các số nguyên dương, m là số các dãy con ba phần tử (a_i, a_j, a_k) với $1 \leq i < j < k \leq 2001$ sao cho $a_j = a_i + 1$ và $a_k = a_j + 1$. Xét tất cả các dãy A như vậy, hãy tìm giá trị lớn nhất của m .

Tài liệu tham khảo

- [1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from The Books*, Springer, 1998.
- [2] Dương Quốc Việt, *Những tư tưởng cơ bản ẩn chứa trong Toán học phổ thông*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2013.
- [3] Dương Quốc Việt (chủ biên), Đàm Văn Nhỉ, *Giáo trình Đại số sơ cấp*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2007.

- [4] Dương Quốc Việt (chủ biên), Lê Văn Đỉnh, *Bài tập Đại số sơ cấp, Phần một số nguyên lý cơ bản*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2012.
- [5] Nhóm SV K57D, *Chuyên đề Đại số sơ cấp*, Đại học Sư phạm Hà Nội.
- [6] Một số tài liệu trên Internet.

XUNG QUANH SỐ FIBONACCI

Hoàng Minh Quân[†]

Có lẽ với những người học và yêu Toán nói chung thì không ai là không biết đến dãy số Fibonacci, đó là một dãy truy hồi được cho bởi công thức:

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Dãy số rất đặc biệt này được Leonardo Fibonacci (hay còn có tên khác là Leonarda da Pisa) là một nhà Toán học người Ý công bố vào năm 1202 trong cuốn sách Liber Abacci (sách về toán đố) qua hai bài toán: *Bài toán con thỏ* và *bài toán số các "cụ tổ" của một ong đực*.

Henry E Dudeney (1857-1930) (là một nhà văn và nhà Toán học người Anh) nghiên cứu ở bò sữa, cũng đạt kết quả tương tự.

Thế kỉ XIX, nhà Toán học Edouard Lucas (người Pháp) xuất bản một bộ sách bốn tập với chủ đề Toán học giải trí, ông đã dùng tên Fibonacci để gọi dãy số kết quả của bài toán từ cuốn Liber Abaci - bài toán đã sinh ra dãy Fibonacci.

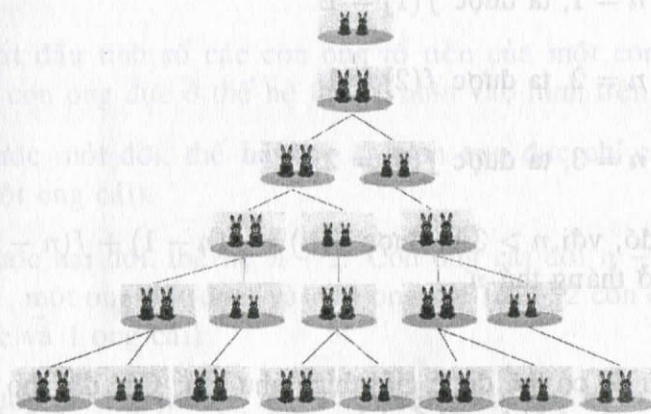
Dãy số này hầu như biến hóa vô tận. Chính điều đó làm cho bao nhà Toán học (chuyên nghiệp lẫn nghiệp dư) và ngay cả chúng ta say mê nghiên cứu, khám phá về nó. Bài viết sau đây trình bày về một số ứng dụng của dãy số Fibonacci cũng như "tỉ lệ vàng" trong các lĩnh vực khoa học tự nhiên, âm nhạc và tài chính.

[†]Trường THPT Ngọc Tảo, Hà Nội.

1. Bài toán mở đầu

1.1. Bài toán con thỏ

Một đôi thỏ (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con (cũng gồm một thỏ đực và thỏ cái); một đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, sau mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi n tháng bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm (tháng Giêng) có một đôi thỏ sơ sinh?



Trong hình vẽ trên, ta quy ước:

- Cặp thỏ nâu là cặp thỏ có độ tuổi 1 tháng.
- Cặp thỏ được đánh dấu (màu đỏ và màu xanh) là cặp thỏ có khả năng sinh sản.

Nhìn vào hình vẽ trên ta nhận thấy:

- Tháng Giêng và tháng Hai: Chỉ có một đôi thỏ.
- Tháng Ba: Đôi thỏ này sẽ đẻ ra một đôi thỏ con, do đó trong tháng này có hai đôi thỏ.
- Tháng Tư: Chỉ có đôi thỏ ban đầu sinh con nên đến thời điểm này có ba đôi thỏ.
- Tháng Năm: Có hai đôi thỏ (đôi thỏ đầu và đôi thỏ được sinh ra ở tháng Ba) cùng sinh con nên ở tháng này có $2 + 3 = 5$ đôi thỏ.

- Tháng Sáu: Có ba đôi thỏ (hai đôi thỏ đầu và đôi thỏ được sinh ra ở tháng Tư) cùng sinh con ở thời điểm này nên đến đây có $3 + 5 = 8$ đôi thỏ.

• ...

Khái quát, nếu n là số tự nhiên khác 0, gọi $f(n)$ là số đôi thỏ có ở tháng thứ n , ta có:

- Với $n = 1$, ta được $f(1) = 1$.
- Với $n = 2$, ta được $f(2) = 1$.
- Với $n = 3$, ta được $f(3) = 2$.
- Do đó, với $n > 3$ ta được $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ số đôi thỏ ở tháng thứ n .

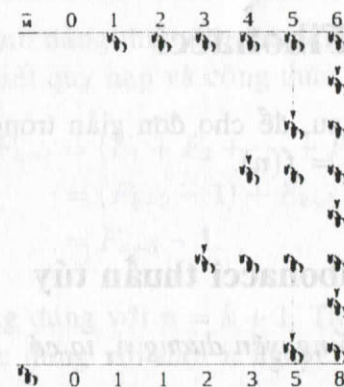
Điều đó có thể được giải thích như sau: Các đôi thỏ sinh ra ở tháng $n-1$ không thể sinh con ở tháng thứ n , và ở tháng này các đôi thỏ tháng thứ $n-2$ sinh ra một đôi thỏ con nên số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ n chính là giá trị của $f(n-2)$.

1.2. Bài toán con ong

Fibonacci đã mô tả dãy các tổ tiên của một con ong đực như sau (loài ong có thể thụ tinh đơn tính hoặc lưỡng tính). Giả sử rằng:

- Nếu một trứng ong thụ tinh bởi chính con ong cái nó nở thành một con ong đực.
- Tuy nhiên, nếu một trứng thụ tinh bởi một ong đực nó nở thành một con ong cái.

Như vậy một con ong đực sẽ luôn có một mẹ, và một con ong cái sẽ có cả bố và mẹ.



Ta bắt đầu tính số các con ong tổ tiên của một con ong đực. Xét một con ong đực ở thế hệ thứ n , nhìn vào hình trên ta thấy:

- Trước một đời, thế hệ $n-1$: Con ong đực chỉ có một mẹ (một ong cái).
- Trước hai đời, thế hệ $n-2$: Con ong cái đời $n-1$ có 2 bố mẹ, một ong bố (đực) và một ong mẹ (cái) (2 con ong, 1 ong đực và 1 ong cái).
- Trước ba đời, thế hệ $n-3$: Con ong cái thế hệ $n-2$ lại có hai bố mẹ, một ong bố (đực) và một mẹ (cái), và con đực thế hệ $n-2$ có một mẹ (3 con ong, 1 ong đực và 2 ong cái).
- Trước bốn đời, thế hệ $n-4$: Hai con cái, mỗi con có 2 cha, mẹ và mỗi con đực có một mẹ (5 con ong: 2 ong đực và 3 ong cái).
- Tiếp tục quá trình này ta sẽ có một dãy số Fibonacci.

Kết luận. Như vậy, công việc giải quyết hai bài toán trên của Fibonacci dẫn tới việc khảo sát một dãy số $f(n)$ được xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 1 \\ f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ với } n > 2 \end{cases}$$

Đó là dãy Fibonacci và các số hạng trong dãy được gọi là các số Fibonacci.

2. Đẳng thức Fibonacci

Từ phần này trở về sau, để cho đơn giản trong việc biểu diễn và biến đổi, ta sẽ đặt $F_n = f(n)$.

2.1. Đẳng thức Fibonacci thuần túy

Định lý 1. Với mọi số nguyên dương n , ta có

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Chứng minh. Ta có thể chứng minh kết quả này bằng hai cách như sau:

Cách 1. Sử dụng công thức truy hồi của số Fibonacci, chúng ta có:

$$F_1 = F_3 - F_2,$$

$$F_2 = F_4 - F_3,$$

$$F_3 = F_5 - F_4,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n,$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Cộng các đẳng thức trên lại theo vế, ta được ngay:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

Cách 2. Trong cách này, ta sử dụng phương pháp quy nạp Toán học. Với $n = 1$, ta có

$$F_1 = F_3 - F_2 = F_3 - 1,$$

nên đẳng thức đúng với $n = 1$. Giả sử đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, tức là

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1.$$

Chúng ta chứng minh đẳng thức đó cũng đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp và công thức truy hồi của dãy, ta có

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_{k+1} &= (F_1 + F_2 + \cdots + F_k) + F_{k+1} \\ &= (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} = (F_{k+1} + F_{k+2}) - 1 \\ &= F_{k+3} - 1. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra đẳng thức đúng với mọi n nguyên dương. Định lý được chứng minh. $\square$

Định lý 2. Với mọi số nguyên dương n , ta có

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Chứng minh. Sử dụng công thức truy hồi của số Fibonacci với quy ước $F_0 = 0$, ta có

$$F_1 = F_2 - F_0,$$

$$F_3 = F_4 - F_2,$$

$$F_5 = F_6 - F_4,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$F_{2n-3} = F_{2n-2} - F_{2n-4},$$

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}.$$

Cộng các đẳng thức trên, ta được:

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}.$$

Đây chính là kết quả cần chứng minh. $\square$

Nhận xét. Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Định lý 3 (Công thức Cassini). Với mọi số nguyên dương n , ta có

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Với $n = 1$, ta có

$$F_0 F_2 - F_1^2 = 0 \cdot 1 - 1 = -1 = (-1)^1,$$

nên đẳng thức đúng với $n = 1$. Giả sử đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức ta có

$$F_{k-1} F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k.$$

Chúng ta chứng minh đẳng thức đó cũng đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, sử dụng giả thiết quy nạp và công thức truy hồi của dãy, ta có

$$\begin{aligned} F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} - F_{k-1})(F_k + F_{k+1}) - F_{k+1}^2 \\ &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 - F_k F_{k-1} - F_{k-1} F_{k+1} - F_{k+1}^2 \\ &= F_k F_{k+1} - F_k F_{k-1} - F_k^2 - (-1)^k \\ &= F_k F_{k+1} - F_k(F_{k-1} + F_k) + (-1)^{k+1} \\ &= F_k F_{k+1} - F_k F_{k+1} + (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Từ đây, áp dụng nguyên lý quy nạp, ta suy ra ngay kết quả cần chứng minh. $\square$

Định lý 4. Với mọi n nguyên dương, ta đều có

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Dễ thấy đẳng thức đúng với $n = 1$. Bây giờ, giả sử đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức ta có:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 = F_k F_{k+1}. \quad (1)$$

Khi đó, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, sử dụng (1), ta có

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_{k+1}^2 &= (F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2) + F_{k+1}^2 \\ &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} F_{k+2}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$. Sử dụng nguyên lý quy nạp, ta suy ra nó đúng với mọi n . Đây chính là kết quả cần chứng minh. $\square$

Định lý 5. Với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, ta đều có

$$F_n^4 - F_{n-2} F_{n-1} F_{n+1} F_{n+2} = 1.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Dễ dàng kiểm tra được kết quả đúng với $n = 3$. Bây giờ, giả sử đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, tức ta có

$$F_k^4 - F_{k-2} F_{k-1} F_{k+1} F_{k+2} = 1.$$

Khi đó, theo nguyên lý quy nạp, ta cần phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$:

$$F_{k+1}^4 - F_{k-1} F_k F_{k+2} F_{k+3} = 1.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta chỉ cần chứng minh:

$$F_{k+1}^4 - F_{k-1} F_k F_{k+2} F_{k+3} = F_k^4 - F_{k-2} F_{k-1} F_{k+1} F_{k+2},$$

hay

$$F_{k+1}^4 - F_k^4 = F_{k-1} F_k F_{k+2} F_{k+3} - F_{k-2} F_{k-1} F_{k+1} F_{k+2}.$$

Vế trái của đẳng thức trên:

$$F_{k+1}^4 - F_k^4 = (F_{k+1} - F_k)(F_{k+1} + F_k)(F_{k+1}^2 + F_k^2) = F_{k-1} F_{k+2}(F_{k+1}^2 + F_k^2),$$

trong khi đó vế phải bằng:

$$F_{k-1} F_k F_{k+2} F_{k+3} - F_{k-2} F_{k-1} F_{k+1} F_{k+2} = F_{k+2} F_{k-1}(F_k F_{k+3} - F_{k+1} F_{k-2}).$$

Từ các biến đổi này và chú ý $F_{k-1} F_{k+2} > 0$, ta đưa về chứng minh:

$$F_{k+1}^2 + F_k^2 + F_{k+1} F_{k-2} - F_k F_{k+3} = 0,$$

hay

$$F_{k+1}^2 + F_k^2 + F_{k+1} F_{k-2} - F_k(F_{k+1} + F_{k+2}) = 0.$$

Đẳng thức cuối có thể được viết lại thành:

$$F_{k+1}(F_{k+1} - F_k + F_{k-2}) + F_k(F_k - F_{k+2}) = 0.$$

Kết quả này đúng vì ta có

$$\begin{aligned} F_{k+1}(F_{k+1} - F_k + F_{k-2}) + F_k(F_k - F_{k+2}) \\ = F_{k+1}(F_{k-1} + F_{k-2}) - F_k F_{k+1} \\ = F_{k+1} F_k - F_k F_{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$. Định lý được chứng minh. $\square$

Ngoài các đẳng thức ở trên, ta cũng xây dựng được các đẳng thức khác cũng rất đẹp sau đây (bạn đọc có thể tự chứng minh bằng các phương pháp tương tự):

Định lý 6. (a) Với n là số nguyên dương chẵn, thì:

$$F_n F_{n+1} = F_{n-2} F_{n+3} + 2.$$

(b) Với n là số nguyên dương lẻ, thì:

$$F_n F_{n+1} = F_{n-2} F_{n+3} - 2.$$

Định lý 7. Với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$(a) F_0 + F_3 + F_6 + \cdots + F_{3n} = \frac{1}{2}(F_{3n+2} - 1).$$

$$(b) F_2 + F_5 + F_8 + \cdots + F_{3n-1} = \frac{1}{2}(F_{3n+1} - 1).$$

Định lý 8. Với mọi số tự nhiên n , ta đều có

$$F_0 + F_4 + F_8 + \cdots + F_{4n} = F_{2n} F_{2n+2}.$$

2.2. Nhìn đẳng thức Fibonacci bằng con mắt toán cao cấp

Sử dụng công cụ của toán cao cấp để soi sáng các vấn đề của toán sơ cấp giúp cho người học toán có cái nhìn đa chiều hơn và sâu sắc hơn về bài toán đó. Nhiều bài toán về đẳng thức Fibonacci có hình thức đẹp mắt và khó dành cho học sinh phổ thông, đôi khi lại được xây dựng từ ý tưởng của toán cao cấp.

Mặc dù phần này đối với các em học sinh có thể hơi cao vì vượt quá chương trình học nhưng do xu thế hiện nay có khá nhiều bài toán mức độ thi Olympic lại được xây dựng từ Toán cao cấp nên để hiểu thêm bản chất bài toán, hay đối với giáo viên, sinh viên Toán thì có lẽ lại là phần thú vị, vì từ đây chúng ta có thể tự sáng tác nhiều đẳng thức Fibonacci mới, hoặc cũng giúp chúng ta có cái nhìn rộng hơn để hiểu rõ quá trình hình thành của nhiều đẳng thức Fibonacci.

Số lượng các đôi thỏ trưởng thành trong tháng thứ $n + 2$ là a_{n+2} bao gồm số lượng các đôi thỏ trưởng thành trong tháng $n + 1$ là a_{n+1} , cộng với số lượng các đôi thỏ con ở tháng trước phát triển thành thỏ trưởng thành (b_{n+1}). Khi đó, ta có

$$a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1}, \quad n > 0. \quad (1)$$

Mặt khác, ta cũng thấy rằng, ở tháng thứ $n + 1$ số đôi thỏ con bằng số đôi thỏ trưởng thành trong tháng liền kề trước đó, tức là:

$$b_{n+1} = a_n. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 1 \text{ và } a_1 = 1.$$

Từ đó, ta xây dựng ma trận Fibonacci như sau:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n \end{aligned}$$

Như vậy, ta có

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Chúng ta xem xét ma trận sau được gọi là ma trận Fibonacci:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sử dụng các tính chất của ma trận, chúng ta sẽ tìm được một số mối liên hệ giữa các ma trận và các số Fibonacci.

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tương tự như vậy, chúng ta có

$$Q^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Một cách tổng quát, chúng ta chứng minh được kết quả sau đây mà ta sẽ phát biểu dưới hình thức như một bổ đề:

Bổ đề 1. Với mọi số nguyên dương n , ta có

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Dễ thấy khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, tức là:

$$Q^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} Q^{k+1} &= Q^k \cdot Q = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kết quả này chứng tỏ khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra bổ đề đúng với mọi n nguyên dương. $\square$

Bằng cách sử dụng ma trận Fibonacci, ta có thể thiết lập được nhiều đẳng thức từ đơn giản đến phức tạp của các số Fibonacci. Thật vậy, hãy cùng xem xét các kết quả sau:

Định lý 9 (Trở lại với công thức Cassini). Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta đều có

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Chứng minh. Từ ma trận:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

chúng ta có $|Q| = -1$. Do đó:

$$|Q|^n = (-1)^n. \quad (1)$$

Mặt khác, ta lại có

$$|Q|^n = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Đây chính là kết quả cần chứng minh. $\square$

Định lý 10. Với mọi số nguyên dương m, n , ta có:

$$(a) \quad F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n.$$

$$(b) \quad F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}.$$

$$(c) \quad F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n.$$

$$(d) \quad F_{m+n-1} = F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1}.$$

Chứng minh. Từ $Q^m \cdot Q^n = Q^{m+n}$, ta có

$$\begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix}.$$

Khai triển ra, ta được đẳng thức tương đương sau:

$$\begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n & F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \\ F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix}.$$

Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Trong trường hợp $m = n$ thì từ định lý 9, chúng ta có một số tính chất rất đẹp sau:

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2, \quad F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1}.$$

Như vậy với phép toán nhân ma trận, chúng ta có thể sáng tạo ra nhiều đẳng thức mới liên quan đến các số Fibonacci.

3. Số Fibonacci và tính chất số học

3.1. Số chính phương liên quan tới số Fibonacci

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ thì số $A_n = 4F_{n-2}F_nF_{n+2}F_{n+4} + 9$ là số chính phương, với F_k là số Fibonacci thứ k .

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh kết quả sau: Với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, thì:

$$a_n = |F_{n+4}F_{n-2} - F_{n+2}F_n| = 3. \quad (1)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} a_n &= |(F_{n+2} + F_{n+3})F_{n-2} - F_{n+2}F_n| \\ &= |F_{n+3} + F_{n-2} + F_{n+2}(F_{n+2} - F_n)| \\ &= |F_{n+3} + F_{n-2} + F_{n+2} + F_{n-1}| \\ &= |F_{n+3}(F_{n-1} - F_{n-3}) - F_{n+2}F_{n-1}| \\ &= |F_{n+3} + F_{n-3} + F_{n+1}(F_{n+2} - F_{n+3})| \\ &= |F_{n+3}F_{n-3} - F_{n+1}F_{n-1}| = a_{n-1}. \end{aligned}$$

Từ đây, ta suy ra:

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_3, \quad n \geq 3. \quad (2)$$

Mặt khác, ta lại có

$$a_3 = |F_7F_1 - F_5F_3| = |13 \cdot 1 - 5 \cdot 2| = 3.$$

Do đó, kết hợp với (2), ta thu được ngay đẳng thức (1).

Trở lại bài toán, từ (1) ta suy ra $F_{n+4}F_{n-2} = F_nF_{n+2} \pm 3$ và như vậy, ta có

$$A_n = 4F_nF_{n+2}(F_nF_{n+2} \pm 3) + 9 = (2F_nF_{n+2} \pm 3)^2.$$

Vì F_n nguyên với mọi $n \geq 3$ nên A_n là số chính phương với mọi $n \geq 3$. $\square$

Bài toán 2. Gọi u_n là số Fibonacci thứ n . Chứng minh rằng $5u_n^2 + 4 \cdot (-1)^n$ là số chính phương.

Chứng minh. Sử dụng công thức Cassini, ta có

$$(-1)^n = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2.$$

Từ đó, ta suy ra:

$$\begin{aligned} 5u_n^2 + 4 \cdot (-1)^n &= u_n^2 + 4[u_n^2 + (-1)^n] = u_n^2 + 4u_{n+1}u_{n-1} \\ &= (u_{n+1} - u_{n-1})^2 + 4u_{n+1}u_{n-1} = (u_{n+1} + u_{n-1})^2. \end{aligned}$$

Kết quả này chứng tỏ $5u_n^2 + 4 \cdot (-1)^n$ là số chính phương. $\square$

Nhận xét. Bằng phương pháp tương tự, ta cũng chứng minh được bài toán: Ký hiệu F_n là số Fibonacci thứ n , khi đó $5F_{2n-1}^2 - 4 \cdot (-1)^n$ là số chính phương với mọi $n \geq 1$.

Bài toán 3. Cho dãy số (u_n) được cho bởi công thức $u_0 = 0, u_1 = 1$ và:

$$\frac{u_{n+1} - 3u_n + u_{n-1}}{2} = (-1)^n, \quad n \geq 1.$$

Chứng minh rằng u_n là số chính phương với mọi số tự nhiên n .

Chứng minh. Dễ dàng thấy rằng $u_2 = 1, u_3 = 4, u_4 = 9, u_5 = 25$ nên từ dãy số Fibonacci, ta thấy $u_0 = F_0^2, u_1 = F_1^2, u_2 = F_2^2, u_3 = F_3^2, \dots$ với F_k là số Fibonacci thứ k .

Từ đó chúng ta có ý tưởng chứng minh:

$$u_n = F_n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Việc chứng minh kết quả này không khó. Ta có thể thực hiện khá đơn giản bằng cách sử dụng phương pháp quy nạp Toán học. $\square$

Để kết lại phần này, mời bạn đọc cùng thử sức với bài toán sau:

Bài toán 4. Gọi F_n là số Fibonacci thứ n . Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $F_n = n^2$.

Đáp số của bài toán này là $n = 0, n = 1$ và $n = 12$.

3.2. Tính chia hết liên quan tới số Fibonacci

Bài toán 5. Cho dãy số (u_n) được cho bởi công thức $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 6$ và:

$$u_{n+4} = 2u_{n+3} + u_{n+2} - 2u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 0.$$

Chứng minh rằng u_n chia hết cho n với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh. Dễ thấy rằng $u_4 = 12, u_5 = 25, u_6 = 48$. Từ đó ta có nhận xét sau:

$$\frac{u_1}{1} = \frac{u_2}{2} = 1, \quad \frac{u_3}{3} = 2, \quad \frac{u_4}{4} = 3, \quad \frac{u_5}{5} = 5, \quad \frac{u_6}{6} = 8.$$

Như vậy ta thấy $\frac{u_n}{n} = F_n$ với F_n là số Fibonacci thứ n với $n = 1, 2, \dots, 6$. Điều này cho phép ta dự đoán rằng $\frac{u_n}{n} = F_n$ với F_n là số Fibonacci thứ n với $n \geq 1$. Để chứng minh kết quả này, ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp, xin được dành lại cho bạn đọc. $\square$

Bài toán 6. Chứng minh rằng, nếu $n:k$ thì $F_n:F_k$.

Gợi ý. Trước hết, bạn đọc chứng minh đẳng thức sau:

$$F_i = F_k F_{i-k+1} + F_{k-1} F_{i-k}, \quad i > k.$$

Sau đó sử dụng đẳng thức trên chúng ta sẽ chứng minh được bài toán. $\square$

Một số bài toán khác liên quan đến tính chia hết của số Fibonacci (xin gợi ý bạn đọc rằng từ các bài toán từ bài 7 đến bài 10 đều có thể giải được theo phương pháp quy nạp):

Bài toán 7. Chứng minh rằng $F_n:5^k$ khi và chỉ khi $n:k$.

Bài toán 8. Chứng minh rằng $F_n:2$ khi và chỉ khi $n:3$.

Bài toán 9. Chứng minh rằng $F_n:2^k$ khi và chỉ khi $n:3 \cdot 2^{k-2}$.

Bài toán 10. Chứng minh rằng $F_n:10^k$ khi và chỉ khi $n:\frac{3 \cdot 10^k}{4}$.

Bài toán 11. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p \geq 3$ thì $F_{2p} - F_p$ chia hết cho p .

Gợi ý. Hãy chứng minh đẳng thức $F_{2p} - F_p = F_p L_p - F_p = F_p(L_p - 1)$ với L_p là số Lucas thứ p , sau đó chứng minh $L_p \equiv 1 \pmod{p}$ nếu p là số nguyên tố. $\square$

Bài toán 12. Cho số nguyên tố p . Chứng minh rằng:

(a) Nếu p có dạng $5k \pm 1$ thì F_{p-1} chia hết cho F_p .

(b) Nếu p có dạng $5k \pm 2$ thì F_{p+1} chia hết cho F_p .

Bài toán 13. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương m, n , ta có

$$(F_{mn-1} - F_{n-1}^m):F_n^2.$$

3.3. Một số bài tập tự luyện về số Fibonacci có liên quan đến các tính chất số học khác

Bài toán 14. Hỏi rằng trong $10^8 + 1$ số hạng đầu tiên của dãy $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{10^8}$ có số nào tận cùng bằng 4 chữ số 0 hay không?

Bài toán 15. Hỏi rằng liệu có tồn tại số Fibonacci có dạng $10^n - 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$?

Bài toán 16 (Indonesia, 2012). Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (k, m, n) thỏa mãn:

$$F_n = F_m^k.$$

Bài toán 17. Gọi F_n là số Fibonacci thứ n . Chứng minh rằng nếu $p > 5$ là số nguyên tố thì:

$$F_p \equiv \left(\frac{p}{5}\right) \pmod{p}.$$

Bài toán 18. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 4$ thì F_{n+1} không là số nguyên tố.

4. Số Fibonacci và tổ hợp

4.1. Số Fibonacci và tam giác Pascal

Cho n, k là các số nguyên không âm và $k \leq n$. Khi đó, hệ số nhị thức Newton cho bởi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Định lý 11. Cho n, k là các số nguyên không âm và $k \leq n$. Khi đó, ta có

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} VP = \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot [n - (n-k)]!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} = VT. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Định lý 12 (Đẳng thức Pascal). Cho n, k là các số nguyên dương và $k \leq n$. Khi đó, ta có

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Chứng minh. Sử dụng định nghĩa, ta có

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} \\ &= \frac{k \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-k) \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)!} \\ &= \frac{k \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-k) \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot n}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức Pascal được chứng minh. $\square$

Định lý 13 (Công thức Binet). Dãy Fibonacci (F_n) có công thức tổng quát là:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

trong đó $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ và $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Chứng minh. Xét phương trình đặc trưng $x^2 - x - 1 = 0$ của dãy (F_n) , ta thấy phương trình có hai nghiệm là $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ và $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Do đó, F_n có dạng tổng quát là:

$$F_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n. \quad (1)$$

Để tìm A, B , chúng ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} F_1 = A\alpha + B\beta = 1 \\ F_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Thay các số vừa tìm được vào (1), ta có

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Đây chính là kết quả cần chứng minh. $\square$

Bài toán 19. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n , ta đều có

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i = F_{2n}.$$

Chứng minh. Áp dụng công thức Binet, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \beta^i \right] \\ &= \frac{(1 + \alpha)^n - (1 + \beta)^n}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

Do $1 + \alpha = \alpha^2$ và $1 + \beta = \beta^2$ nên từ đây, ta suy ra:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_i = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = F_{2n}.$$

Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Bài toán 20. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n , ta đều có

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} F_i = (-1)^{n-1} F_n.$$

Chứng minh. Áp dụng công thức Binet, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} F_i &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \left(\frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \alpha^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \beta^i \right] \\ &= \frac{(\alpha - 1)^n - (\beta - 1)^n}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

Do $\alpha - 1 = -\beta$ và $\beta - 1 = -\alpha$ nên từ biến đổi ở trên, ta suy ra:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} F_i &= \frac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = (-1)^{n-1} F_n. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. $\square$

4.2. Số Fibonacci và đẳng thức tổ hợp

Từ công thức truy hồi của dãy Fibonacci, ta dễ dàng chứng minh được kết quả bài toán sau:

Bài toán 21. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta đều có

$$F_{n+6} = 4F_{n+3} + F_n.$$

Sử dụng kết quả bài toán này, chúng ta sẽ chứng minh được bài toán sau:

Bài toán 22. Chứng minh rằng với $\frac{k}{3} \in \mathbb{Z}$, $\frac{k}{3} - 1 = n$ và $n \geq 2$, ta có

$$F_k = 2^{2n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{2n-2(i+1)} F_{3i}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Với $n = 2$, ta có $F_9 = 34 = 2^5 + F_3$ nên khẳng định đúng với $n = 2$. Bây giờ, giả sử điều khẳng định đúng với $n = m - 1$, tức là:

$$F_{3m} = 2^{2m-1} + \sum_{i=1}^{m-2} 2^{2m-2-2(i+1)} F_{3i}.$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = m$, tức ta phải chứng minh:

$$F_{3m+3} = 2^{2m+1} + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{2m-2(i+1)} F_{3i}.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta thấy đẳng thức này tương đương với:

$$\frac{1}{4} F_{3m+3} = 2^{2m-1} + \sum_{i=1}^{m-2} 2^{2m-2-2(i+1)} F_{3i} + 2^{-2} F_{3m-3},$$

hay

$$F_{3m+3} = 4F_{3m} + F_{3m-3}.$$

Đẳng thức cuối đúng theo kết quả bài toán 21. $\square$

Định lý 14. Cho $\frac{n}{2}, \frac{k}{3} \in \mathbb{Z}$, $\frac{k}{3} - 1 = n$ và $n \geq 0$. Khi đó, ta có đẳng thức tổ hợp sau:

$$F_k = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} 2^{2n+1-4i} \binom{n-i}{n-2i}.$$

Chứng minh. Với $\frac{n}{2}, \frac{k}{3} \in \mathbb{Z}$, $\frac{k}{3} - 1 = n$ và $n \geq 0$ thì từ đẳng thức bài toán 21, ta có

$$F_3 = \binom{0}{0} 2^1,$$

$$F_9 = \binom{2}{2} 2^5 + \binom{1}{0} 2^1,$$

$$F_{15} = \binom{4}{4} 2^9 + \binom{3}{2} 2^5 + \binom{2}{0} 2^1,$$

$$F_{21} = \binom{6}{6} 2^{13} + \binom{5}{4} 2^9 + \binom{4}{2} 2^5 + \binom{3}{0} 2^1,$$

...

$$F_k = \binom{n}{n} 2^{2n+1} + \binom{n-1}{n-2} 2^{2n-3} + \binom{n-2}{n-4} 2^{2n-7} + \dots + \binom{\frac{n}{2}}{0} 2^1.$$

Như vậy, ta có

$$F_k = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} 2^{2n+1-4i} \binom{n-i}{n-2i}.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Hệ quả 1. Với $\frac{n}{2}, \frac{k}{3} \in \mathbb{Z}$, $\frac{k}{3} - 1 = n$ và $n \geq 0$, ta có

$$F_{\frac{k}{3}} = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{n-2i}.$$

Hệ quả 2. Với $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{k-1}{2} = n$ và $n \geq 0$, ta có

$$F_k = \sum_{i=0}^n \binom{n+i}{2i}.$$

Định lý 15. Cho $\frac{n+1}{2}, \frac{k}{3} \in \mathbb{Z}$, $\frac{k}{3} - 1 = n$ và $n \geq 1$. Khi đó, ta có đẳng thức tổ hợp sau:

$$F_k = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 2^{2n+1-4i} \binom{n-i}{n-2i}.$$

Chứng minh. Định lý này được chứng minh tương tự như định lý 13. $\square$

Hệ quả 3. Với $\frac{n+1}{2}, \frac{k}{3} \in \mathbb{Z}$, $\frac{k}{3} - 1 = n$ và $n \geq 1$, ta có

$$F_{\frac{k}{3}} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-i}{n-2i}.$$

Hệ quả 4. Với $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{k}{2} - 1 = n$ và $n \geq 0$, ta có

$$F_k = \sum_{i=0}^n \binom{n+1+i}{1+2i}.$$

4.3. Số Fibonacci và một số bài toán tổ hợp khác

Có nhiều bài toán đếm tổ hợp mà kết quả của nó là số Fibonacci hoặc có liên quan đến số Fibonacci. Sau đây là một số ví dụ:

Bài toán 23 (Áo, 1998). Cho (a_n) là dãy số thỏa mãn $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tính tổng của $a_n \left(\frac{2}{5}\right)^n$ với mọi số nguyên dương n .

Lời giải. Đặt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là hàm sinh cho dãy (a_n) . Khi đó, ta có

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots, \quad (1)$$

$$-x f(x) = -a_0 x - a_1 x^2 - a_2 x^3 - \dots \quad (2)$$

và

$$-x^2 f(x) = -a_0 x^2 - a_1 x^3 - a_2 x^4 - \dots \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta thu được:

$$(1 - x - x^2) f(x) = a_0 + (a_1 - a_0) x + (a_2 - a_1 - a_0) x^2 + \dots = x.$$

Suy ra

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Với kết quả này, ta tính được $f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{10}{11}$. $\square$

Bài toán 24 (Phổ thông Năng khiếu, 2009). Cho $A = \{1, 2, \dots, 2n\}$. Một tập con của A được gọi là tốt nếu nó có đúng hai phần tử x, y và $|x - y| \in \{1, n\}$. Tìm số các tập hợp $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ thỏa mãn điều kiện A_i là tập con tốt với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ và $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$.

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Vương Linh, học sinh trường THPT chuyên KHTN, Hà Nội). Từ giả thiết, ta sẽ viết lại bài toán như sau: “Cho một hình chữ nhật kích thước $2 \times n$ được chia thành các ô vuông đơn vị. Đánh số các ô từ trái qua phải là $1, 2, \dots, n$ (hàng 1) và $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ (hàng 2). Lát chúng bằng các quân domino 1×2 sao cho chúng phủ kín hình chữ nhật và không có hai quân nào đè lên nhau. Ngoài ra, với n lẻ, ta được bổ sung thêm một quân domino “đặc biệt” có thể phủ kín hai ô n và $n + 1$. Đếm số cách lát thỏa mãn đề bài.”

Ta giải bài toán mới này như sau: Gọi S_n là số cách lát thỏa mãn đề bài với hình chữ nhật kích thước $2 \times n$. Ta sẽ tìm cách xây dựng công thức truy hồi cho S_n .

Giả sử ta đã lát được hình chữ nhật $2 \times (n + 1)$ bằng các quân domino. Xét quân domino phủ lên ô vuông n . Có ba khả năng xảy ra:

- (1) Quân domino đó phủ lên hai ô $(n, 2n)$. Rõ ràng phần còn lại là một hình chữ nhật kích thước $2 \times n$, và số cách lát trong trường hợp này là S_n .
- (2) Quân domino đó phủ lên hai ô $(n, n + 1)$. Như vậy, buộc phải có một quân domino phủ lên hai ô $(2n - 1, 2n)$ và khi đó, phần còn lại là một hình chữ nhật kích thước $2 \times (n - 1)$, tức số cách lát trong tình huống này là S_{n-1} .
- (3) Quân domino đó phủ lên hai ô $(n, n + 1)$ (với n lẻ). Khi đó, phần còn lại chỉ có thể lát được bằng các quân domino nằm ngang (nếu có một quân domino nào nằm dọc thì nó sẽ chia hình chữ nhật thành hai phần, mỗi phần có một số lẻ ô chưa được lát (do quân domino “đặc biệt” gây ra)), tức trong trường hợp này chỉ có một cách lát duy nhất.

Như vậy, ta xây dựng được công thức truy hồi như sau:

- $S_{2k} = S_{2k-1} + S_{2k-2} - 1$ (Lưu ý rằng khi n chẵn thì không có quân domino “đặc biệt” nên phải bớt đi một cách của S_{2k-1}).
- $S_{2k+1} = S_{2k} + S_{2k-1}$ (Lập luận tương tự với quân domino “đặc biệt”).

Và bằng quy nạp ta sẽ thu được $S_{2k} = F_{2k}$ và $S_{2k+1} = F_{2k+1} + 1$, trong đó F_k là số Fibonacci thứ k của dãy Fibonacci được xác định bởi công thức $F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Cuối cùng ta được công thức tổng quát:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] + \frac{1 - (-1)^n}{2}.$$

Đây chính là kết quả của bài toán. $\square$

Bài toán 25. Chứng minh rằng với 10 đoạn thẳng bất kỳ có độ dài > 1 và ≤ 54 , ta đều có thể chọn ra được ba đoạn thẳng là ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh. Giả sử độ dài của 10 đoạn thẳng theo thứ tự là $1 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10} \leq 54$. Khi đó điều kiện để không có tam giác nào được tạo ra là $a_i + a_{i+1} \leq a_{i+2}$ với mọi $1 \leq i \leq 8$.

Điều này có nghĩa là $a_3 \geq a_2 + a_1 > 2, a_4 \geq a_3 + a_2 > 3$, và cứ tiếp tục ta có $a_{10} > 54$, mâu thuẫn. Để ý rằng các giá trị chọn a_i là các số Fibonacci F_i . $\square$

Bài toán 26. Có bao nhiêu cách lát một sàn nhà hình chữ nhật kích thước $1 \times n$ bởi các viên gạch có kích thước 1×1 và 1×2 ?

Lời giải. Gọi a_n là số cách cần tìm và A_n là tập các cách thỏa mãn. Ta có

$$|A_n| = a_n. \quad (1)$$

Để thấy $|A_1| = a_1 = 1, |A_2| = a_2 = 2$ và $|A_3| = a_3 = 3$.

Gọi B_1 là tập hợp các cách chia thỏa mãn hình chữ nhật cuối cùng có kích thước 1×1 ; B_2 là tập hợp các cách chia thỏa mãn hình chữ nhật cuối cùng có kích thước 1×2 .

Ta có $A_n = B_1 + B_2$, suy ra:

$$|A_n| = |B_1| + |B_2|. \quad (*)$$

Trước hết, ta tính $|B_1|$. Số phần tử của B_1 chính bằng số cách chia hình chữ nhật đã cho bỏ đi hình chữ nhật có kích thước 1×1 cuối cùng. Nói cách khác, số phần tử của B_1 chính bằng số cách chia hình chữ nhật có kích thước $1 \times (n-1)$, suy ra:

$$|B_1| = a_{n-1}. \quad (2)$$

Lập luận tương tự như trên, ta có

$$|B_2| = a_{n-2}. \quad (3)$$

Thay (1), (2), (3) vào (*), ta được:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3.$$

Vậy số cách a_n thỏa mãn yêu cầu là F_n với F_n là số Fibonacci thứ n . $\square$

Sau đây là một số bài toán tổ hợp khác cũng liên quan đến dãy số Fibonacci. Chúng tôi sẽ không giới thiệu lời giải ra ở đây mà muốn bạn đọc cùng thử sức.

Bài toán 27 (Iran, 2008). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có

$$\sum_{k=1}^n \binom{n+k-1}{2k-1} = F_{2n}.$$

Bài toán 28. Cho tập $S = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ với n là số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu tập con X của S thỏa mãn điều kiện chúng ta không thể lấy ra hai phần tử $a, b \in X$ sao cho $|a-b| = 2$?

Bài toán 29. Biết rằng cứ 7 số nguyên dương thuộc $[1, k]$, ta luôn luôn chọn được ít nhất ba trong 7 số đó là độ dài các cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất có thể của k ?

Bài toán 30. Cho số tự nhiên n . Tìm số tập con A của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa mãn:

$$A \cup (A+1) = \{1, 2, 3, \dots, n\},$$

biết rằng $A+1 = \{a+1 | a \in A\}$.

Bài toán 31. Cho dãy số Fibonacci xác định bởi $F_0 = F_1 = 1$ và $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ với $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} F_{k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-1)^{n-k} F_{2k+1}.$$

5. Số Fibonacci và một số vấn đề liên quan khác

5.1. Tổng Fibonacci có trọng số

Ở định lý 1, ta đã chứng minh được công thức $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$.

Từ đây, một bài toán mới được đặt ra là hãy tính tổng $\sum_{i=1}^n a_i F_i$ với a_i là các số nguyên dương.

Trước hết chúng ta bắt đầu bằng bài toán đơn giản nhất của tổng trên với $a_i = i$ ở bài toán sau:

Bài toán 32. Với mỗi số nguyên dương n , tính tổng sau:

$$F_1 + 2F_2 + \dots + nF_n.$$

Lời giải. Đặt $A_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ và $B_n = F_1 + 2F_2 + \dots + nF_n$. Ta có

$$\begin{aligned} B_n &= F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \dots + nF_n \\ &= \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{i=2}^n F_i + \sum_{i=3}^n F_i + \dots + \sum_{i=n}^n F_i \\ &= A_n + (A_n - A_1) + (A_n - A_2) + \dots + (A_n - A_{n-1}) \\ &= nA_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i = n(F_{n+2} - 1) - \sum_{i=1}^{n-1} (F_{i+2} - 1) \\ &= nF_{n+2} - n - (F_{n+3} - 3) + (n-1) = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2. \end{aligned}$$

Vậy $B_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$. $\square$

Bài toán 33. Với mỗi số nguyên dương n , tính tổng sau:

$$C_n = \sum_{i=1}^n (2i-1)F_{2i-1}.$$

Lời giải. Để tính tổng C_n , chúng ta sẽ áp dụng kết quả của định lý 2:

$$F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}, \quad F_0 + F_2 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Đặt $D_n = F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}$, ta có

$$\begin{aligned} C_n &= F_1 + 3F_3 + 5F_5 + \dots + (2n-1)F_{2n-1} \\ &= \sum_{i=1}^n F_{2i-1} + 2 \sum_{i=2}^n F_{2i-1} + 2 \sum_{i=3}^n F_{2i-1} + \dots + 2 \sum_{i=n}^n F_{2i-1} \\ &= D_n + 2(D_n - D_1) + 2(D_n - D_2) + \dots + 2(D_n - D_{n-1}) \\ &= D_n + 2(n-1)D_n - 2 \sum_{i=1}^{n-1} D_i = (2n-1)D_n - 2 \sum_{i=1}^{n-1} F_{2i} \\ &= (2n-1)D_n - 2(F_{2n-1} - 1) = (2n-1)F_{2n} - 2(F_{2n-1} - 1) \\ &= (2n-1)F_{2n} - 2F_{2n-1} + 2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } C_n = (2n-1)F_{2n} - 2F_{2n-1} + 2. \quad \square$$

Bài toán 34. Với mỗi số nguyên dương n , tính tổng sau:

$$\sum_{i=1}^n (2n-2i+1)F_{2i-1}.$$

Lời giải. Đặt $E_n = \sum_{i=1}^n (2n-2i+1)F_{2i-1}$. Để tính tổng này, ta sẽ sử dụng định lý 2 và kết quả bài toán trên. Ta có

$$\begin{aligned} C_n + E_n &= \sum_{i=1}^n (2i-1)F_{2i-1} + \sum_{i=1}^n (2n-2i+1)F_{2i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n [(2i-1) + (2n-2i+1)]F_{2i-1} = 2n \sum_{i=1}^n F_{2i-1} \\ &= 2nF_{2n}. \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} E_n &= 2nF_{2n} - C_n = 2nF_{2n} - [(2n-1)F_{2n} - 2F_{2n-1} + 2], \\ &= F_{2n} + 2F_{2n-1} - 2 = (F_{2n} + F_{2n-1}) + F_{2n-1} - 2, \\ &= F_{2n+1} + F_{2n-1} - 2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } E_n = F_{2n+1} + F_{2n-1} - 2. \quad \square$$

Để kết lại phần này, mời bạn đọc cùng thử sức với bài toán tính tổng sau:

Bài toán 35. Với mỗi số nguyên dương n , tính các tổng sau:

(a) $\sum_{i=1}^n (2i)F_{2i}$. (Đáp số: $2nF_{2n+1} - 2F_{2n}$.)

(b) $\sum_{i=1}^n (2n-2i+2)F_{2i}$. (Đáp số: $2F_{2n+2} - 2n - 2$.)

5.2. Số Fibonacci và bất đẳng thức trong tam giác

Đây là một tìm tòi mới được phát hiện trong thời gian gần đây về số Fibonacci. Đối với học sinh chuyên Toán, ngoài khả năng giải toán tốt thì khả năng tìm tòi và sáng tạo hay phát hiện ra những điều mới cũng rất quan trọng.

Bài toán 36. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$a^2F_n + b^2F_{n+1} + c^2F_{n+2} \geq 4S\sqrt{F_nF_{n+1} + F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+2}F_n}.$$

Chứng minh. Đặt $k = 4\sqrt{F_nF_{n+1} + F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+2}F_n}$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành:

$$a^2F_n + b^2F_{n+1} + c^2F_{n+2} \geq kS,$$

hay

$$a^2F_n + b^2F_{n+1} + (a^2 + b^2 - 2ab \cos C)F_{n+2} \geq \frac{1}{2}kab \sin C.$$

Quy đồng mẫu số và bằng các phép nhóm đơn giản, ta viết được bất đẳng thức dưới dạng:

$$2a^2(F_n + F_{n+2}) + 2b^2(F_{n+1} + F_{n+2}) - ab(4F_{n+2} \cos C + k \sin C) \geq 0.$$

hay tương đương

$$\frac{2a}{b}(F_n + F_{n+2}) + \frac{2b}{a}(F_{n+1} + F_{n+2}) - (4F_{n+2} \cos C + k \sin C) \geq 0. (*)$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(4F_{n+2} \cos C + k \sin C)^2 \leq (16F_{n+2}^2 + k^2)(\cos^2 C + \sin^2 C),$$

từ đó suy ra

$$\begin{aligned} 4F_{n+2} \cos C + k \sin C &\leq \sqrt{16F_{n+2}^2 + k^2} \\ &= 4\sqrt{(F_n + F_{n+2})(F_{n+1} + F_{n+2})}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$\begin{aligned} \frac{2a}{b}(F_n + F_{n+2}) + \frac{2b}{a}(F_{n+1} + F_{n+2}) \\ \geq 4\sqrt{(F_n + F_{n+2})(F_{n+1} + F_{n+2})}. \end{aligned} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) lại, ta suy ra (*). $\square$

Bài toán 37. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$a^2 F_n + b^2 F_{n+1} + c^2 F_{n+2} \geq 4S \left(\sum_{k=1}^{n+2} F_k^2 - F_{n+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chứng minh. Sử dụng kết quả bài toán trên, ta có

$$\begin{aligned} a^2 F_n + b^2 F_{n+1} + c^2 F_{n+2} &\geq 4S \sqrt{F_n F_{n+1} + F_{n+1} F_{n+2} + F_{n+2} F_n} \\ &= 4S \sqrt{F_n F_{n+1} + F_{n+2}^2}. \end{aligned}$$

Mặt khác, theo định lý 4, ta lại có

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Do đó, kết hợp với đánh giá ở trên, ta thu được ngay:

$$\begin{aligned} a^2 F_n + b^2 F_{n+1} + c^2 F_{n+2} &\geq 4S \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 + F_{n+2}^2} \\ &= 4S \left(\sum_{k=1}^{n+2} F_k^2 - F_{n+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Đây chính là kết quả cần chứng minh. $\square$

Bài toán 38. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} 3(F_{n+1} F_{n+2} a^2 + F_{n+2} F_n b^2 + F_n F_{n+1} c^2) \\ \geq \left(a \sqrt{F_{n+1} F_{n+2}} + b \sqrt{F_{n+2} F_n} + c \sqrt{F_{n+1} F_n} \right)^2. \end{aligned}$$

Chứng minh. Kết quả này được suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. $\square$

5.3. Số Fibonacci và tỉ lệ vàng

Tỉ lệ vàng α , được định nghĩa là tỉ số khi chia đoạn thẳng thành hai phần sao cho tỉ lệ giữa cả đoạn ban đầu với đoạn lớn hơn bằng tỉ số giữa đoạn lớn và đoạn nhỏ. Có thể chứng minh rằng nếu quy độ dài đoạn lớn về đơn vị thì tỉ lệ này là nghiệm dương của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$.

“Tỉ lệ vàng” được cho là hằng số rút ra từ dãy Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... - dãy vô hạn các số tự nhiên bắt đầu bằng hai phần tử 0 và 1, các phần tử sau đó được thiết lập theo quy tắc mỗi phần tử luôn bằng tổng hai phần tử trước nó. Điều đáng nói là, tỉ số giữa hai số liên tiếp nhau của dãy số đó ngày càng tiến đến số tỉ lệ vàng là 1.618.

Dãy số Fibonacci cũng như số “tỉ lệ vàng” là những bí ẩn lớn của Toán học. Chúng tồn tại khắp nơi, trong tự nhiên, trong hội họa, kiến trúc, tài chính, khoa học... Ví dụ như, nếu chia tổng số ong cái cho tổng số ong đực trong một tổ ong bất kỳ, sẽ có giá trị là 1.618. Hay trên cơ thể hầu hết những người bình thường: tỉ lệ của chiều cao cơ thể chia cho chiều cao từ thất lưng trở xuống hoặc tỉ lệ chiều dài cánh tay (tính từ vai đến đầu ngón tay) chia cho chiều dài từ khuỷu tay tới đầu ngón tay đều cho kết quả xấp xỉ 1.618.

“Tỉ lệ vàng” cũng được tìm thấy trong kiến trúc cổ như Kim tự tháp Ai Cập, điện Parthenon ở Hy Lạp hay trong các bức tượng cổ và những bức tranh thời kỳ Phục hưng. Nó biểu hiện cho quan niệm về cái đẹp và sự cân xứng, ưa nhìn.

Tam giác vàng

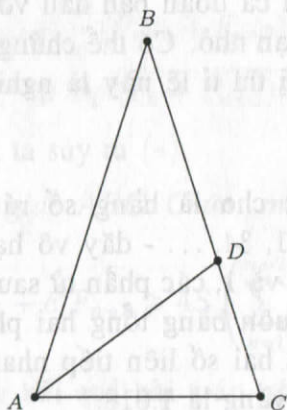
Một tam giác cân có tỉ số giữa cạnh bên và cạnh đáy bằng tỉ số vàng được gọi là tam giác vàng.

Chúng ta sẽ tìm hiểu một số tính chất của tam giác vàng.

Bài toán 39. Cho tam giác vàng ABC với cạnh đáy AC . D là điểm chia cạnh BC theo tỉ số vàng và $BD > CD$. Chứng minh rằng AD là đường phân giác trong góc A .

Chứng minh. Do D chia cạnh BC theo tỉ số vàng nên ta có

$$\frac{BD}{CD} = \alpha.$$



Mặt khác, do ABC là tam giác vàng nên ta cũng có

$$\frac{AB}{AC} = \alpha.$$

Từ hai kết quả trên, ta thu được

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$$

Điều này chứng tỏ AD là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC . $\square$

Nhận xét. Ta cũng chứng minh được rằng: Nếu ABC là tam giác vàng với cạnh đáy AC và D là chân đường phân giác trong góc A thì CAD cũng là một tam giác vàng.

Bài toán 40. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC là tam giác vàng thì góc ở đỉnh bằng 36° .

Chứng minh. Giả sử ABC là tam giác vàng với $AB = BC = \alpha AC$. Gọi D là điểm chia BC theo tỉ số vàng như hình vẽ bài 39. Dựa vào nhận xét ở trên, ta có CAD cũng là một tam giác vàng và đồng dạng với tam giác ABC , suy ra

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADC} = 2\widehat{DAC}.$$

Đặt góc $\widehat{ACD} = 2x$ thì từ $\triangle ACD$, ta có

$$2x + 2x + x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ.$$

Vậy $\widehat{A} = \widehat{C} = 72^\circ$, $\widehat{B} = 36^\circ$. $\square$

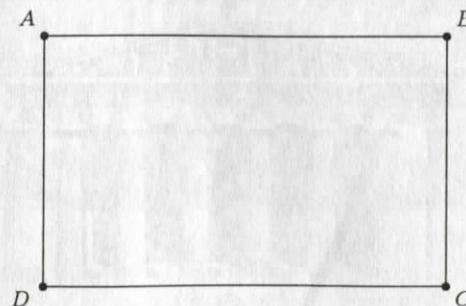
Sau đây là một số bài toán khác, mời bạn đọc cùng thử sức.

Bài toán 41. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC cân, cạnh đáy AC , có góc ở đỉnh bằng 36° thì tam giác ABC là tam giác vàng.

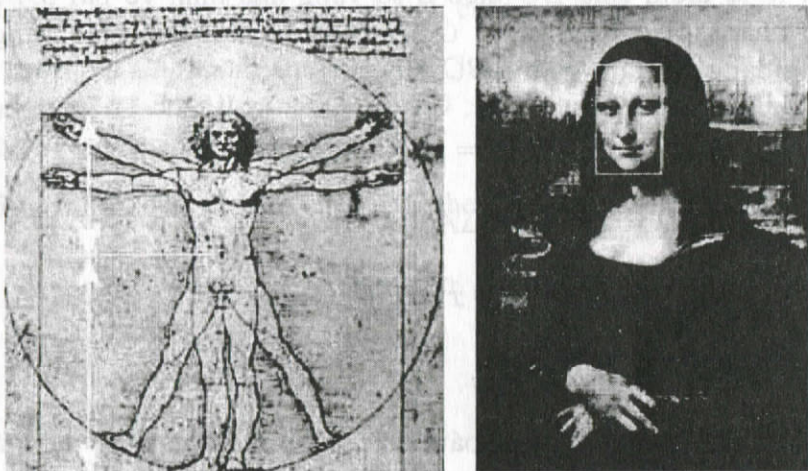
Bài toán 42. Cho tam giác ABC cân đỉnh B . D là một điểm trên cạnh BC sao cho $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle CAD$. Chứng minh rằng ABC là tam giác vàng khi và chỉ khi $\frac{S_{ABC}}{S_{BDA}} = \alpha$.

Hình chữ nhật vàng

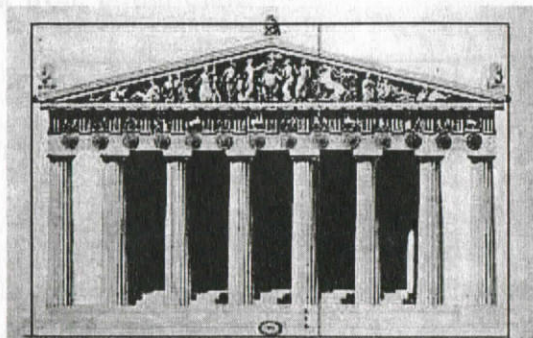
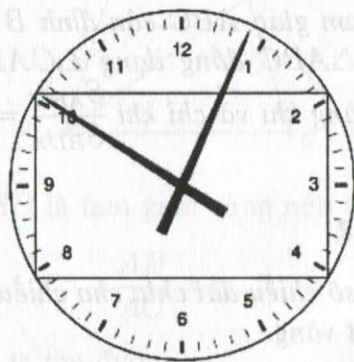
Hình chữ nhật có tỉ số chiều dài chia cho chiều rộng bằng tỉ số vàng gọi là hình chữ nhật vàng.



Một số hình chữ nhật vàng trong thực tiễn là các bức họa nổi tiếng, hay các công trình cổ đại trên thế giới có tỉ lệ vàng. Chẳng hạn như hình tượng chúa Jesus, bức tranh nàng Mona Lisa của đại danh họa Leonardo Da Vinci:



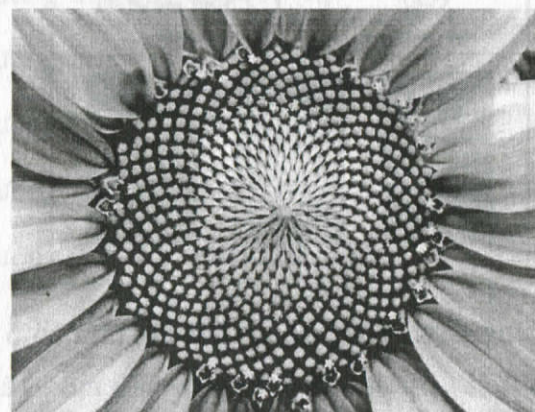
Hình chữ nhật vàng cũng xuất hiện ở đồng hồ, hay công trình kiến trúc cổ.



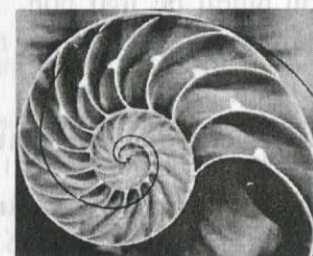
5.4. Dãy số Fibonacci trong tự nhiên và kinh tế - xã hội

Dãy số Fibonacci trong tự nhiên

Dãy Fibonacci xuất hiện ở khắp nơi trong thiên nhiên. Những chiếc lá trên một nhánh cây mọc cách nhau những khoảng tương ứng với dãy số Fibonacci. Các số Fibonacci xuất hiện trong những bông hoa. Ngoài ra, số Fibonacci còn được tìm thấy trong sự sắp xếp chồi lá trên thân cây, sừng động vật, gia phả loài ong đực, dạng vòng xoáy trong quả thông, trái khóm (thơm)...

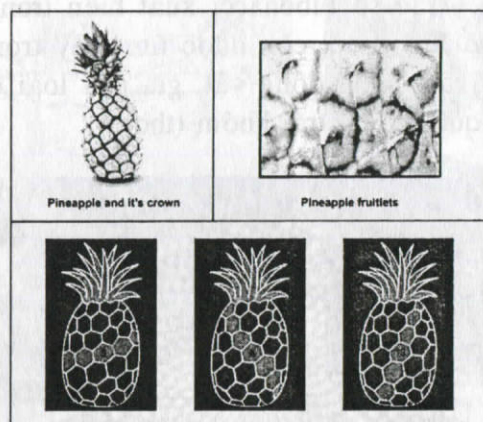


Hầu hết các bông hoa có số cánh hoa là một trong các số 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 hoặc 89. Hoa loa kèn có ba cánh, hoa mao lương vàng có 5 cánh, hoa phi yến thường có 8 cánh, hoa cúc vạn thọ có 13 cánh, hoa cúc tây có 21 cánh, hoa cúc thường có 34 hoặc 55 hoặc 89 cánh.



Các số Fibonacci cũng xuất hiện trong các bông hoa hướng dương. Những nụ nhỏ sẽ kết thành hạt ở đầu bông hoa hướng

đường được xếp thành hai tập các đường xoắn ốc: một tập cuộn theo chiều kim đồng hồ, còn tập kia cuộn ngược theo chiều kim đồng hồ. Số các đường xoắn ốc hướng thuận chiều kim đồng hồ thường là 34, còn ngược chiều kim đồng hồ là 55. Đôi khi các số này là 55 và 89, và thậm chí là 89 và 144. Tất cả các số này đều là các số Fibonacci kế tiếp nhau (tỉ số của chúng tiến tới tỉ số vàng).



Trái thông cũng vậy. Vòng xoáy từ trung tâm có 5 và 8 nhánh.

Trái khóm có ba xoáy là 5, 8 và 13. Lại một bằng chứng những con số này không phải ngẫu nhiên. Thiên nhiên chơi trò Toán học với chúng ta?

Không ai biết nhưng các khoa học gia suy đoán rằng các loài thực vật mọc theo hình thể xoáy ốc theo những con số Fibonacci vì nó tiết kiệm nhiều bề mặt hơn. Sắp xếp như thế, chúng gia tăng điều kiện tăng trưởng và do đó, nhiều điều kiện sinh tồn hơn.

Dãy số Fibonacci trong âm nhạc

Bản vanxơ Fibonacci là một bản nhạc mà giai điệu của nó bắt nguồn từ một trong những dãy số nổi tiếng nhất trong Lý thuyết số - dãy số Fibonacci. Hai số đầu tiên của dãy là số 1 và số 2, các số tiếp theo được xác định bằng tổng của hai số liên tiếp ngay trước nó trong dãy.

Bản vanxơ Fibonacci thu được bằng việc chuyển dãy số Fibonacci thành dãy các nốt nhạc theo qui tắc chuyển một số nguyên dương thành nốt nhạc sau đây:

- Số 1 tương ứng với nốt Đô (C).
- Số 2 tương ứng với nốt Rê (D).
- Số 3 tương ứng với nốt Mi (E).
- Số 4 tương ứng với nốt Fa (F).
- Số 5 tương ứng với nốt Sol (G).
- Số 6 tương ứng với nốt La (A).
- Số 7 tương ứng với nốt Si (B).
- Số 8 tương ứng với nốt Đô (C).
- Số 9 tương ứng với nốt Rê (D).
- Và cứ tiếp tục như vậy.

Ví dụ, một dãy gồm 6 số Fibonacci đầu tiên 1, 2, 3, 5, 8 và 13 tương ứng với dãy các nốt nhạc C, D, E, G, C và A.

Để xây dựng nhịp điệu vanxơ người ta đi tìm các đoạn nhạc có tính chu kỳ trong bản vanxơ Fibonacci. Đoạn nhạc được gọi là có tính chu kỳ nếu như có thể chia nó ra thành $k \geq 2$ đoạn giống hệt nhau. Ví dụ, đoạn nhạc GCAGCA là đoạn có tính chu kỳ, vì nó gồm hai đoạn giống nhau GCA.

Dãy số Fibonacci trong thị trường chứng khoán

Fibonacci Retracements (tỉ lệ hoàn lại theo Fibonacci) là một công cụ rất phổ biến trong phân tích kỹ thuật, nó dựa trên dãy số Fibonacci do nhà Toán học Leonardo Fibonacci xây dựng vào thế kỷ XIII. *Fibonacci Retracements* được tạo ra bằng cách vẽ đường thẳng nối kết giữa hai điểm giá cao nhất và thấp nhất của đồ thị giá trong giai đoạn phân tích và phân chia khoảng cách theo chiều dọc theo các tỷ lệ Fibonacci quan trọng như 23.6%, 38.2%, 50.0%, 61.8%

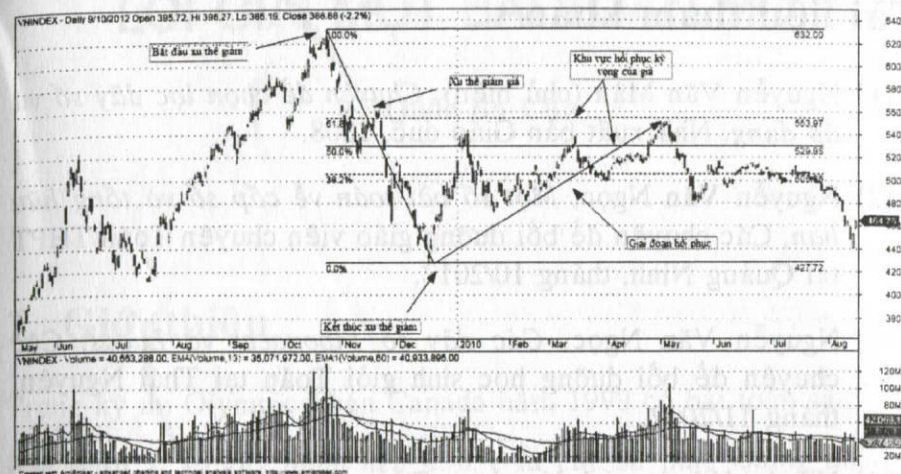
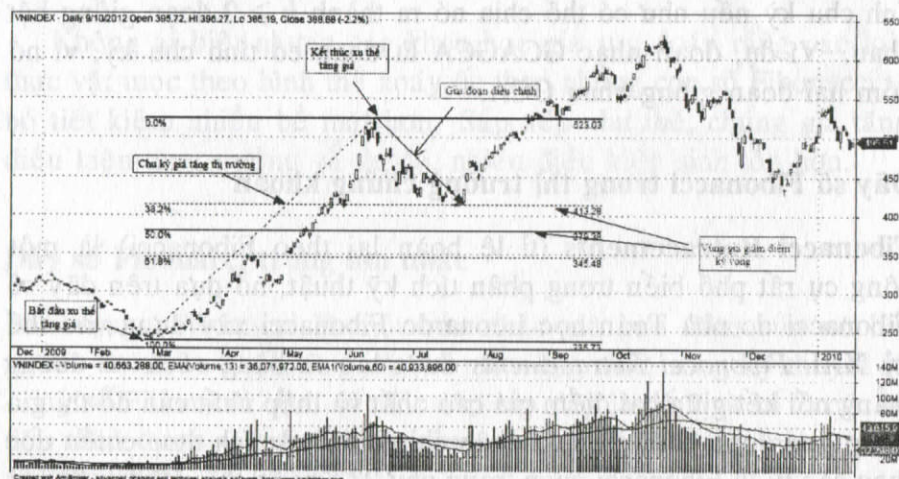
và 100.0%. (Một số phần mềm giao dịch hiện nay như Metatrader tự động sử dụng các mức Fibonacci 0.0%, 23.6%, 38.2%, 50%, 61.8%, 100%.)

Một khi những mức này được nhận diện thì các đường nằm ngang được vẽ ra và được sử dụng để nhận diện các mức hỗ trợ và các mức kháng cự có thể có.

Dãy số Fibonacci như sau: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

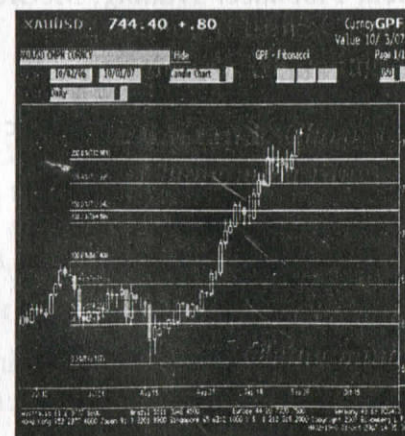
- Tỷ lệ Fibonacci 61.8% được tạo ra bằng cách chia một số bất kỳ trong dãy số Fibonacci với số liền sau nó. Ví dụ, $\frac{8}{13} = 0.6153$, $\frac{55}{89} = 0.6179$.
- Tỷ lệ 38.2% được tạo ra bằng cách chia một số bất kỳ trong dãy số Fibonacci với số ở vị trí thứ hai về bên phải của nó. Ví dụ, $\frac{55}{144} = 0.3819$.
- Tỷ lệ 23.6% được tạo ra bằng cách chia một số bất kỳ trong dãy số Fibonacci với số ở vị trí thứ ba về bên phải của nó. Ví dụ, $\frac{8}{34} = 0.2352$.

Các nhà đầu tư thường sử dụng các mức Fibonacci thoái lui như các mức kháng cự và hỗ trợ hiệu quả. Họ sử dụng mức này để vào lệnh mua/bán hoặc xác định mức chặn lỗ.



Fibonacci Extensions thường được dùng để dự báo các mức hỗ trợ và kháng cự trong tương lai và được vẽ vượt khỏi biên độ 100%. Những mức này được tính bằng cách phân tích các mức hoàn lại giữa hai điểm cao nhất và thấp nhất trong một khung giao dịch. Vấn đề đặt ra là điều gì sẽ xảy ra khi giá vượt qua hai điểm mà ta sử dụng để tính các mức Fibonacci? Tại điểm nào thì chúng ta kỳ vọng thoát trạng thái? Câu trả lời chính cho những vấn đề này là **Fibonacci Extensions (Fibonacci mở rộng)**.

Fibonacci Extensions cho các mục tiêu giá vượt qua mức hoàn lại 100% của xu hướng trước. Các mức **Fibonacci Extensions** được tính bằng cách lấy các mức Fibonacci chuẩn cộng thêm 100%. Do đó, các mức **Fibonacci Extensions** chuẩn như sau: 138.2%, 150%, 161.8%, 231.8%, 261.8%, 361.8% và 423.6%.



Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc dãy số và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.
- [2] Nguyễn Văn Ngọc, *Một số bài toán về cấp số và tổng hữu hạn*, Các chuyên đề bồi dưỡng giáo viên chuyên Toán THPT tại Quảng Ninh, tháng 10/2012.
- [3] Nguyễn Văn Ngọc, *Các dãy số Fibonacci và Lucas*, Các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán tại Thái Nguyên, tháng 11/2012.
- [4] Nikolai Nikolaevich Vorobev, *Fibonacci Numbers*, Birkhauser, 2001.
- [5] Fredric T. Howard, *Applications of Fibonacci Numbers*.
- [6] Alfred S. Posamentier, Ingmar Lehmann, *The fabulous Fibonacci numbers*, 2007.
- [7] Thomas Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, 2011.
- [8] Constance Brown, *Fibonacci Analysis*.
- [10] Robert Fischer, *Fibonacci Applications and Strategies for Traders*, 1993.
- [11] Carolyn Boroden, *Fibonacci Trading*, McGraw-Hill, 2008.
- [12] <http://vi.wikipedia.org>.
- [13] <http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-number>.
- [14] <http://phochungkhoan.vn>.
- [15] Tài liệu phân tích kỹ thuật của ngân hàng Á Châu ACB.

LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN MỞ

Võ Quốc Bá Cẩn

1. Giới thiệu

Trong kỳ thi Olympic Toán Canada năm 1999 có bài toán sau:

Bài toán 1. Chứng minh nếu a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1 thì:

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{4}{27}.$$

Sau đó, người ta đã tìm được một kết quả khác tổng quát hơn như sau:

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho $a+b+c = 1$. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 2$, ta luôn có bất đẳng thức:

$$a^n b + b^n c + c^n a \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Vào khoảng năm 2005, Vasile Cirtoaje đã đề xuất trên diễn đàn AoPS một bài toán mới với hình thức phát biểu tương tự:

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng

$$a^{3/2}b + b^{3/2}c + c^{3/2}a \leq 3.$$

Có thể thấy rằng tất cả các kết quả này đều nhằm mục đích đánh giá các biểu thức có dạng $a^k b + b^k c + c^k a$ khi đã biết trước tổng của ba số a, b, c (tổng này có thể là những giá trị dương tùy ý). Như vậy, câu hỏi đặt ra là: Với một giá trị dương bất kỳ của k , liệu ta có tìm được một chặn trên thật "tốt" cho biểu thức $a^k b + b^k c + c^k a$?

Với ý tưởng như vậy, Vasile Cirtoaje đã đề xuất bài toán mở của mình như sau:

Bài toán 4. Cho a, b, c là các số dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng với mọi $k > 0$, ta luôn có bất đẳng thức:

$$a^k b + b^k c + c^k a \leq \max \left\{ 3, \frac{3^{k+1} k^k}{(k+1)^{k+1}} \right\}.$$

Trong [1], tác giả Vasile Cirtoaje đã giới thiệu lời giải cho các trường hợp $0 < k \leq \frac{3}{2}$, $k \geq \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$ và $k = k_0$ với $k_0 \approx 1.558$ là nghiệm của phương trình $(k+1)^{k+1} = (3k)^k$.

Trong [2], tác giả Phạm Kim Hùng cũng đã nhắc lại kết quả này dưới dạng bài toán mở và đề xuất thêm một số bài toán liên quan khác.

Trong [3], chúng tôi cũng đã giới thiệu lời giải của mình cho bài toán 4 ở trên. Đây quả thực là một bài toán khó nhưng cũng rất thú vị. Trong quá trình tìm tòi lời giải cho nó, chúng tôi đã đúc kết được cho mình một kỹ thuật mới giúp đưa một bất đẳng thức về xét tại một trường hợp đặc biệt: có một biến nhận giá trị biên.

Và ở đây, trong bài viết này, chúng tôi sẽ giới thiệu lại lời giải của mình cho bài toán mở trên cũng như muốn giới thiệu cùng bạn đọc kỹ thuật xử lý của mình. Tuy nhiên, do thời gian chuẩn bị có hạn nên chúng tôi chưa có điều kiện trình bày cụ thể phương pháp mới này, xin được hẹn lại trong một bài viết khác.

Tất nhiên, do đây là một bài toán mở khó nên lời giải của nó khá dài dòng và phức tạp. Hy vọng rằng, sau khi đọc bài viết này xong, sẽ có một bạn đọc nào đó tìm ra được một lời giải ngắn gọn và sáng sủa hơn.

2. Lời giải bài toán mở

Để giải bài toán này, ta sẽ xét ba trường hợp như sau:

Trường hợp 1. $0 < k \leq 1$. Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli kết hợp với kết quả cơ bản:

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3},$$

ta được

$$\begin{aligned} a^k b + b^k c + c^k a &= b[1 + (a-1)]^k + c[1 + (b-1)]^k + a[1 + (c-1)]^k \\ &\leq b[1 + k(a-1)] + c[1 + k(b-1)] + a[1 + k(c-1)] \\ &= k(ab + bc + ca) + 3 - 3k \\ &\leq k \cdot \frac{(a+b+c)^2}{3} + 3 - 3k = 3. \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $1 < k < 2$. Trong trường hợp này, bằng cách sử dụng kết quả đơn giản (bạn đọc có thể tự chứng minh): Nếu $x \geq y \geq z \geq 0$ và $m > 1$, thì

$$x^m y + y^m z + z^m x \geq xy^m + yz^m + zx^m, \quad (*)$$

dễ dàng nhận thấy rằng ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp $a \geq b \geq c \geq 0$ là đủ.

Bây giờ đặt $K = \max \left\{ 3, \frac{3^{k+1} k^k}{(k+1)^{k+1}} \right\}$, $a = c + s$ và $b = c + t$ ($s \geq t \geq 0$), bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$g(c) = K \left(c + \frac{s+t}{3} \right)^{k+1} - (c+s)^k (c+t) - (c+t)^k c - c^k (c+s) \geq 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} g'(c) &= K(k+1) \left(c + \frac{s+t}{3} \right)^k - k[(c+s)^{k-1}(c+t) + (c+t)^{k-1}c \\ &\quad + c^{k-1}(c+s)] - [(c+s)^k + (c+t)^k + c^k] \\ &\geq 3(k+1) \left(c + \frac{s+t}{3} \right)^k - k[(c+s)^{k-1}(c+t) + (c+t)^{k-1}c \\ &\quad + c^{k-1}(c+s)] - [(c+s)^k + (c+t)^k + c^k] \\ &= 3(k+1) \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^k - k(a^{k-1}b + b^{k-1}c + c^{k-1}a) \\ &\quad - (a^k + b^k + c^k). \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh $g'(c) \geq 0$ bằng cách chứng minh

$$3(k+1) \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^k \geq k(a^{k-1}b + b^{k-1}c + c^{k-1}a) + (a^k + b^k + c^k).$$

Sử dụng (*) một lần nữa với $x = a^{k-1}$, $y = b^{k-1}$, $z = c^{k-1}$ và $m = \frac{1}{k-1} > 1$, ta được

$$(a^{k-1})^{\frac{1}{k-1}} b^{k-1} + (b^{k-1})^{\frac{1}{k-1}} c^{k-1} + (c^{k-1})^{\frac{1}{k-1}} (a^{k-1}) \geq a^{k-1} (b^{k-1})^{\frac{1}{k-1}} + b^{k-1} (c^{k-1})^{\frac{1}{k-1}} + c^{k-1} (a^{k-1})^{\frac{1}{k-1}},$$

hay

$$a^{k-1}b + b^{k-1}c + c^{k-1}a \leq ab^{k-1} + bc^{k-1} + ca^{k-1}.$$

Như vậy, bất đẳng thức $g'(c) \geq 0$ sẽ được chứng minh nếu ta có

$$6(k+1) \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^k \geq 2(a^k + b^k + c^k) + k \sum a^{k-1}(b+c).$$

Do tính thuần nhất nên ta có thể giả sử $a+b+c=3$ (chú ý rằng khi $a=b=c=0$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng). Bất đẳng thức trên trở thành

$$6(k+1) \geq 2(a^k + b^k + c^k) + k \sum a^{k-1}(3-a),$$

hay

$$(2-k)(a^k + b^k + c^k) + k(a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}) \leq 6(k+1).$$

Ta viết được bất đẳng thức này dưới dạng $h(a) + h(b) + h(c) \leq 0$, trong đó

$$h(a) = (2-k)a^k + 3ka^{k-1} - k(2k-1)(a-1) - 2(k+1).$$

Lần lượt tính đạo hàm cấp một và cấp hai của $h(a)$, ta được

$$h'(a) = k(2-k)a^{k-1} + 3k(k-1)a^{k-2} - k(2k-1),$$

và

$$\begin{aligned} h''(a) &= k(2-k)(k-1)a^{k-2} + 3k(k-1)(k-2)a^{k-3} \\ &= k(k-1)(2-k)a^{k-3}(a-3). \end{aligned}$$

Do $1 < k < 2$ và $0 \leq a \leq 3$ nên $h''(a) \leq 0$. Điều này chứng tỏ $h'(a)$ là hàm nghịch biến trên $[0, 3]$. Do $h'(1) = 0$ nên ta có $h'(a) > 0$

với $a \in [0, 1]$ và $h'(a) < 0$ với $a \in (1, 3]$. Từ đây suy ra $h(a)$ tăng thực sự trên $[0, 1]$ và giảm thực sự trên $[1, 3]$. Qua những lập luận này, ta dễ dàng nhận thấy $h(a)$ đạt cực đại tại $a = 1$, tức ta có $h(a) \leq h(1) = 0$ với mọi $a \in [0, 3]$.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $h(b) \leq 0$ và $h(c) \leq 0$, do đó $h(a) + h(b) + h(c) \leq 0$. Vậy ta đã chứng minh được $g'(c) \geq 0$. Từ đó suy ra $g(c)$ là hàm tăng với mọi $c \geq 0$, và ta có

$$\begin{aligned} g(c) &\geq g(0) = K \left(\frac{s+t}{3} \right)^{k+1} - s^k t = K \left(\frac{s+t}{3} \right)^{k+1} - k^k \cdot \left(\frac{s}{k} \right)^k \cdot t \\ &\geq K \left(\frac{s+t}{3} \right)^{k+1} - k^k \left(\frac{k \cdot \frac{s}{k} + t}{k+1} \right)^{k+1} \\ &= \frac{1}{3^{k+1}} \left[K - \frac{3^{k+1} k^k}{(k+1)^{k+1}} \right] (s+t)^{k+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Trường hợp 3. $k \geq 2$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta được

$$\begin{aligned} b(a+c)^k &= a^k b \left(1 + \frac{c}{a} \right)^k \geq a^k b \left(1 + \frac{kc}{a} \right) \\ &\geq a^k b \left(1 + \frac{2c}{a} \right) = a^k b + a^{k-1} bc + a^{k-2} abc \\ &\geq a^k b + b^{k-1} bc + c^{k-2} ac^2 = a^k b + b^k c + c^k a. \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM,

$$\begin{aligned} b(a+c)^k &= k^k \cdot \left(\frac{a+c}{k} \right)^k \cdot b \leq k^k \left(\frac{k \cdot \frac{a+c}{k} + b}{k+1} \right)^{k+1} \\ &= \frac{3^{k+1} k^k}{(k+1)^{k+1}} \leq \max \left\{ 3, \frac{3^{k+1} k^k}{(k+1)^{k+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức này lại với nhau, ta dễ dàng suy ra

$$a^k b + b^k c + c^k a \leq b(a+c)^k \leq \max \left\{ 3, \frac{3^{k+1} k^k}{(k+1)^{k+1}} \right\}.$$

Bài toán được chứng minh xong.

3. Bài toán mở mới

Ta thấy rằng bài toán mở của Vasile Cirtoaje thực chất chính là một trường hợp riêng của bài toán sau (đã được Phạm Kim Hùng đề xuất trong [2]):

Bài toán 5. Cho các số không âm a, b, c có tổng bằng 3. Đặt:

$$P(r, s) = a^r b^s + b^r c^s + c^r a^s.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của $P(r, s)$ theo $r, s \in \mathbb{R}$.

Kết quả của Vasile Cirtoaje chính là ứng với trường hợp $r > 0, s = 1$ (và $r = 1, s > 0$). Ngoài ra, chúng ta cũng có lời giải của nó trong một số trường hợp đặc biệt khác như $r = s; r = \frac{3}{2}$ và $s = \frac{1}{2}$ (và ngược lại); $r = \frac{1}{3}$ và $s = -\frac{1}{6}$ (và ngược lại); ... Nhưng liệu chúng ta có tìm được lời giải tổng quát cho nó? Đây thực sự là một vấn đề rất khó, và chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến trao đổi của bạn đọc gần xa.

4. Một số bài tập tự luyện

Trong mục này, chúng tôi xin đề xuất một số bài tập có hình thức phát biểu giống (hoặc gần giống) với các bài toán đã được giới thiệu ở trên. Các bài tập này đều đã có lời giải và bạn đọc có thể thử sức với chúng để cùng nâng cao kỹ năng.

Bài tập 1. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4.$$

Bài tập 2. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq 2 + abc.$$

Bài tập 3. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) là các số thực không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + \dots + x_n^2x_1 \leq \frac{4}{27}.$$

Bài tập 4 (Olympic Toán Trung Âu, 2007). Cho a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng 4. Chứng minh rằng

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4.$$

Bài tập 5 (Dự tuyển IMO, 2007). Cho $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ là các số thực có tổng bình phương bằng 1. Chứng minh rằng

$$a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + \dots + a_{100}^2a_1 < \frac{2}{3}.$$

Bài tập 6 (Anh, 1986). Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^2y + y^2z + z^2x.$$

Bài tập 7. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 3$) là các số thực không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^3x_2^2 + x_2^3x_3^2 + \dots + x_n^3x_1^2 + n^{2(n-1)}x_1^3x_2^3 \dots x_n^3.$$

Tài liệu tham khảo

- [1] Vasile Cirtoaje, *Algebraic Inequalities: Old and New Methods*, GIL, 2006.
- [2] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri Thức, 2006.
- [3] Vasile Cirtoaje, Vo Quoc Ba Can, Tran Quoc Anh, *Inequalities with Beautiful Solutions*, GIL, 2009.

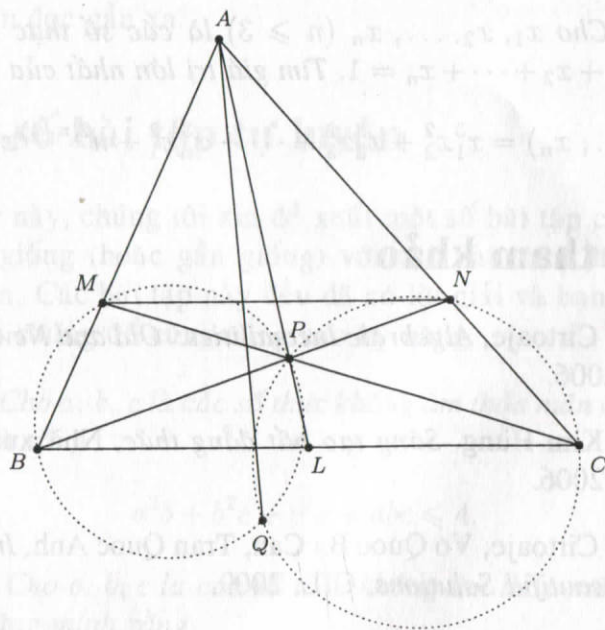
ĐƯỜNG ĐỐI TRUNG VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Trần Ngọc Thắng†

Trong kỳ thi Balkan Mathematical Olympiad lần thứ 26 năm 2009 có bài toán hình học do Moldova đề nghị có nội dung như sau:

Bài toán 1. Cho tam giác ABC , các điểm M và N lần lượt nằm trên các cạnh AB và AC sao cho $MN \parallel BC$. Gọi P là giao điểm của BN và CM . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và CNP cắt nhau tại hai điểm phân biệt P và Q . Chứng minh rằng $\widehat{BAQ} = \widehat{CAP}$.

Chứng minh. Giả sử L là giao của AP và BC , ta sẽ chứng minh L là trung điểm của BC .



†Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc.

Thật vậy, theo định lý Ceva và định lý Thales, ta có

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{MA}{MB} = -1.$$

Mà $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$ nên ta suy ra $\frac{LB}{LC} = -1$, hay L là trung điểm của BC suy ra AL là đường trung tuyến. Do đó yêu bài toán tương đương với việc chứng minh AQ là đường đối trung của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A . $\square$

Trước hết ta nhắc lại một số kết quả liên quan đến đường đối trung của một tam giác.

1. Đường đối trung

Định nghĩa 1. Trong một tam giác, đường thẳng đối xứng với trung tuyến qua đường phân giác trong kẻ từ cùng một đỉnh được gọi là đường đối trung.

1.1. Các tính chất cơ bản

Định lý 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . M là điểm thuộc cạnh BC . Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:

- (1) AM là đường đối trung kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC .
- (2) $\frac{MB}{MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.
- (3) $(BCMN) = -1$, trong đó N là giao điểm của BC với tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A . Đường thẳng AN được gọi là đường đối trung ngoài kẻ từ đỉnh A của $\triangle ABC$.
- (4) $\frac{d(M, AB)}{d(M, AC)} = \frac{AB}{AC}$.
- (5) A, M, S thẳng hàng, trong đó S là giao điểm của các tiếp tuyến kẻ từ các đỉnh B và C của đường tròn (O) .

Định lý 2. Các đường đối trung của một tam giác thì đồng quy tại một điểm, điểm này gọi là điểm Lemoine.

2. Các bài toán áp dụng

Bài toán 2. Cho tam giác ABC , các điểm M và N lần lượt nằm trên các cạnh AB và AC sao cho $MN \parallel BC$. Gọi P là giao điểm của BN và CM . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và CNP cắt nhau tại hai điểm phân biệt P và Q . Chứng minh rằng $\widehat{BAQ} = \widehat{CAP}$.

Chứng minh. Do các tứ giác $BMPQ$, $CNPQ$ nội tiếp nên ta có

$$\widehat{BMQ} = \widehat{BPQ} = \widehat{CPQ}$$

và

$$\widehat{BQM} = \widehat{BPM} = \widehat{NPC},$$

suy ra tam giác QMB đồng dạng với tam giác QCN . Do đó:

$$\frac{d(Q, AB)}{d(Q, AC)} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}.$$

Từ đây, theo tính chất của đường đối trung ta suy ra Q nằm trên đường đối trung kẻ từ đỉnh A hay đường thẳng AQ là đường đối trung của tam giác ABC . Do vậy $\widehat{BAQ} = \widehat{CAP}$. □

Khi M, N lần lượt di chuyển trên các đường thẳng AB, AC và với cách chứng minh tương tự thì Q nằm trên đường đối trung kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Do đó ta có bài toán sau:

Bài toán 3. Cho tam giác ABC , các điểm M và N lần lượt di chuyển trên các đường thẳng AB và AC sao cho $MN \parallel BC$. Gọi P là giao điểm của BN và CM . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và CNP cắt nhau tại hai điểm phân biệt P và Q . Chứng minh rằng điểm Q di chuyển trên một đường thẳng cố định.

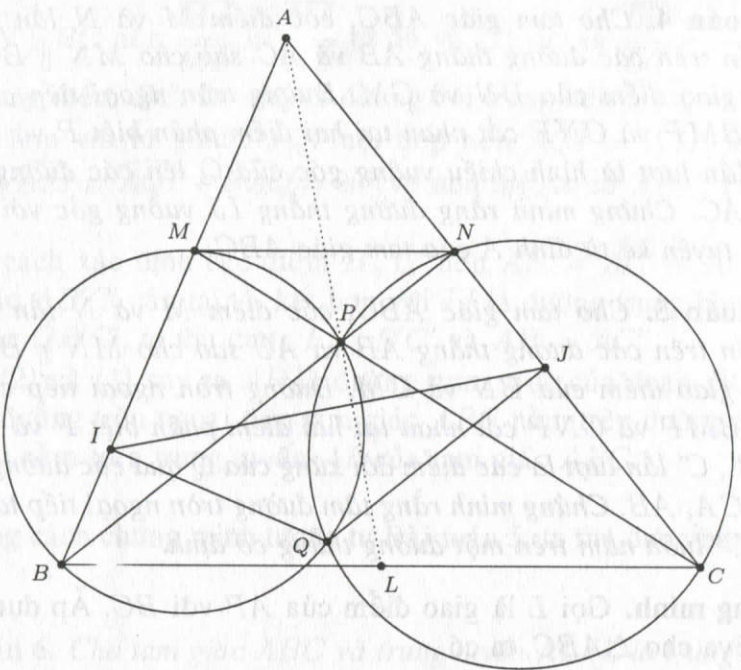
Chứng minh. Do bốn điểm B, Q, P, M cùng nằm trên một đường tròn và bốn điểm C, Q, P, N cùng nằm trên một đường tròn nên ta có

$$(BQ, BM) \equiv (PQ, PM) \equiv (PQ, PC) \equiv (NQ, NC) \pmod{\pi}$$

và

$$(MQ, MB) \equiv (PQ, PB) \equiv (PQ, PN) \equiv (CQ, CN) \pmod{\pi}.$$

Từ đó suy ra $\triangle BQM \sim \triangle NQC$. (1)



Gọi I và J theo thứ tự là hình chiếu của Q trên các đường thẳng BM và CN . Khi đó, do (1) nên:

$$\frac{QI}{QJ} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$$

do $MN \parallel BC$. Từ đó, theo tính chất của đường đối trung, ta suy ra Q nằm trên đường đối trung kẻ từ A của tam giác ABC . □

Nhận xét. Đường thẳng IJ vuông góc với trung tuyến AL của $\triangle ABC$. Thật vậy, tứ giác $AIQJ$ nội tiếp nên $\widehat{AQI} = \widehat{AJI}$, kết hợp với AQ là đường đối trung nên $\widehat{QAI} = \widehat{LAJ}$. Do đó:

$$\widehat{LAJ} + \widehat{AJI} = \widehat{AQI} + \widehat{QAI} = \frac{\pi}{2},$$

suy ra $IJ \perp AL$. Nếu ta gọi B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của Q qua các đường thẳng AC, AB thì do IJ là đường trung bình của tam giác $QB'C'$ nên AL vuông góc với $B'C'$. Mặt khác, $AB' = AC'$ nên AL là đường trung trực của $B'C'$.

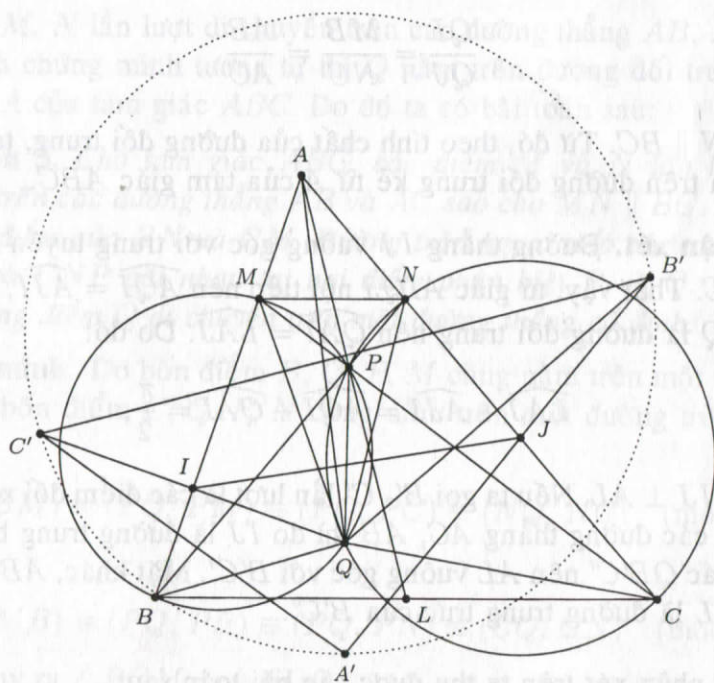
Từ nhận xét trên ta thu được các bài toán sau:

Bài toán 4. Cho tam giác ABC , các điểm M và N lần lượt di chuyển trên các đường thẳng AB và AC sao cho $MN \parallel BC$. Gọi P là giao điểm của BN và CM . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và CNP cắt nhau tại hai điểm phân biệt P và Q . Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q lên các đường thẳng AB, AC . Chứng minh rằng đường thẳng IJ vuông góc với đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC .

Bài toán 5. Cho tam giác ABC , các điểm M và N lần lượt di chuyển trên các đường thẳng AB và AC sao cho $MN \parallel BC$. Gọi P là giao điểm của BN và CM . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và CNP cắt nhau tại hai điểm phân biệt P và Q . Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của Q qua các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Chứng minh. Gọi L là giao điểm của AP với BC . Áp dụng định lý Céva cho $\triangle ABC$, ta có

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1. \quad (1)$$



Do $MN \parallel BC$ nên $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$ từ đó và (1) suy ra $\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} = -1$ hay L là trung điểm BC . Do AQ là đường đối trung nên $\widehat{BAQ} = \widehat{CAP}$ và kết hợp với tứ giác $AJQI$ nội tiếp nên $\widehat{AQI} = \widehat{AJI}$, suy ra $\widehat{CAP} + \widehat{AJI} = \widehat{AQI} + \widehat{BAQ} = 90^\circ$ và như thế, ta có $AP \perp IJ$. (2)

Do cách xác định các điểm B', C' nên $AB' = AC' = AQ$ hay tam giác $AB'C'$ cân tại A , kết hợp với IJ là đường trung bình của tam giác $QB'C'$, ta thu được $IJ \parallel B'C'$ và $AB' = AC'$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra AP là đường trung trực của đoạn BC suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên đường thẳng AP hay nằm trên trung tuyến AL của tam giác ABC . $\square$

Bằng cách chứng minh tương tự Bài toán 5, ta thu được bài toán sau:

Bài toán 6. Cho tam giác ABC và trung tuyến AL (L là trung điểm của đoạn thẳng BC). Gọi P là một điểm di chuyển trên trung tuyến AL và gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng với P qua các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bằng cách chứng minh tương tự như Bài toán 5, ta được tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ nằm trên đường đối trung kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Do đó từ kết quả này và Định lý 2, ta thu được các bài toán sau:

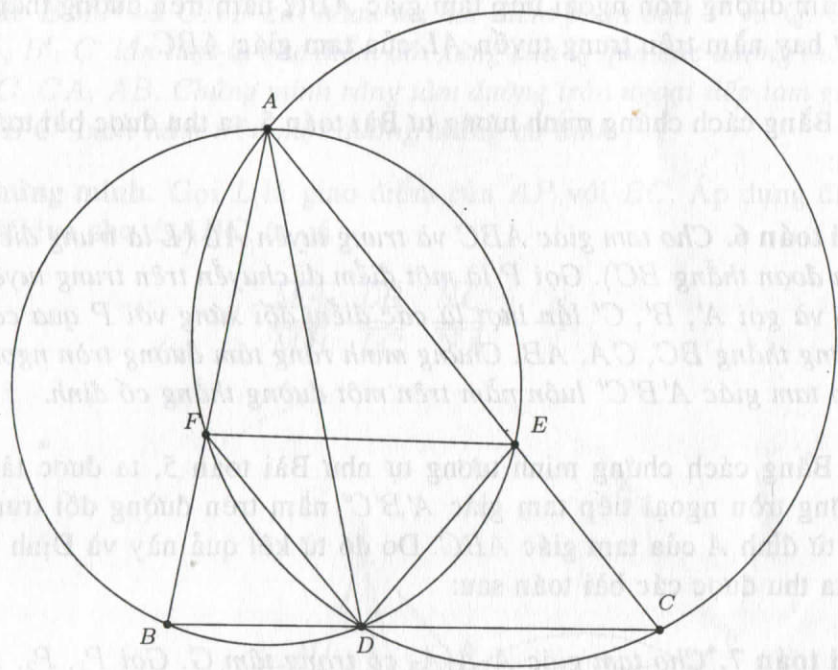
Bài toán 7. Cho tam giác $A_1A_2A_3$ có trọng tâm G . Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt là trung điểm của GA_1, GA_2, GA_3 . Gọi A'_i, B'_i, C'_i lần lượt là điểm đối xứng của P_i qua các đường thẳng $A_{i+1}A_{i+2}$. Gọi O_i là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'_iB'_iC'_i$. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1O_1, A_2O_2 và A_3O_3 đồng quy.

Bài toán 8. Cho tam giác $A_1A_2A_3$ có trọng tâm G . Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt là các điểm đối xứng của A_1, A_2, A_3 qua G . Gọi A'_i, B'_i, C'_i lần lượt là điểm đối xứng của P_i qua các đường thẳng $A_{i+1}A_{i+2}$. Gọi O_i là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'_iB'_iC'_i$. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1O_1, A_2O_2 và A_3O_3 đồng quy.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC và điểm D nằm trên cạnh BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt lại AC tại E và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt lại AB tại F . Chứng minh rằng $DE = DF$ khi và chỉ khi AD là đường đối trung của tam giác ABC .

Chứng minh. Do tứ giác $AFDC$ nội tiếp nên $\widehat{FDB} = \widehat{BAC}$ suy ra tam giác BDF đồng dạng với tam giác BAC . Từ đó ta có $\frac{DF}{AC} = \frac{DB}{AB}$, suy ra

$$DB = \frac{DF \cdot AB}{AC}. \quad (1)$$



Tương tự do tứ giác $ABDE$ nội tiếp nên $\widehat{DEC} = \widehat{BAC}$ suy ra tam giác CED đồng dạng với tam giác CBA . Ta thu được $\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{AC}$ và do đó:

$$DC = \frac{DE \cdot AC}{AB}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có $\frac{DB}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \frac{DF}{DE}$, từ đẳng thức này suy ra $DE = DF$ khi và chỉ khi $\frac{DB}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$, tức AD là đường đối

trung của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A . Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Nhận xét. Nếu AD là đường đối trung hoặc $DE = DF$ thì $EF \parallel BC$. Thật vậy, từ tam giác BDF đồng dạng với tam giác BAC và tam giác CED đồng dạng với tam giác CBA , ta được:

$$\frac{EC}{BC} = \frac{DE}{AB}$$

và

$$\frac{BF}{BC} = \frac{DF}{AC}.$$

Suy ra

$$\frac{EC}{BF} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{BF}{AB} \Rightarrow EF \parallel BC.$$

Do đó ta có các bài toán sau:

Bài toán 10. Cho tam giác ABC và AD là đường đối trung của tam giác ABC (D nằm trên cạnh BC). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt lại AC tại E và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt lại AB tại F . Chứng minh rằng đường thẳng EF song song với đường thẳng BC .

Bài toán 11. Cho tam giác ABC và AD là đường đối trung của tam giác ABC (D nằm trên cạnh BC). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt lại AC tại E và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt lại AB tại F . Gọi P là giao điểm của đường thẳng BE và đường thẳng CF . Chứng minh rằng AP đi qua trung điểm của BC .

Bài toán 12. Cho tam giác ABC và điểm D nằm trên cạnh BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt lại AC tại E và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt lại AB tại F . Chứng minh rằng nếu EF song song với BC thì AD là đường đối trung của tam giác ABC .

Bài toán 13. Cho tam giác ABC và điểm D nằm trên cạnh BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt lại AC tại E và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt lại AB tại F . Chứng minh rằng nếu EF song song với BC thì $\widehat{DAB} = \widehat{PAC}$ trong đó P là giao điểm của đường thẳng BE và đường thẳng CF .

Bài toán 14. Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O và ngoại tiếp đường tròn tâm I . Đường tròn (I) tiếp xúc với BC tại D . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt lại đường thẳng AC tại E và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt lại đường thẳng AB tại F . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, DF . Chứng minh rằng $OI \perp AD$ khi và chỉ khi AD, BN, CM đồng quy tại một điểm.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh hai bổ đề sau:

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O và ngoại tiếp đường tròn tâm I . Đường tròn (I) tiếp xúc với BC tại D . Khi đó OI vuông góc với AD khi và chỉ khi AD là đường đối trung của tam giác ABC .

Thật vậy, đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E', F' . Gọi P là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC . Dễ thấy IP vuông góc với AD , mặt khác theo giả thiết ta có OI vuông góc với AD nên ba điểm O, I, P thẳng hàng hay OP vuông góc với AD . Gọi D' là giao điểm thứ hai của AD với (I) và A' là giao điểm thứ hai của AD và (O) . Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến EF ta được:

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{E'C}{E'A} \cdot \frac{F'A}{F'B} = 1 \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{F'B}{E'C} = \frac{DB}{DC} = -\frac{DB}{DC} \\ \Rightarrow (BCPD) = -1.$$

Do OP vuông góc với AD nên AD là đường thẳng đối cực của điểm P đối với đường tròn (O) . Do đó, PA, PA' là tiếp tuyến của đường tròn (O) . Mặt khác theo chứng minh trên ta có $(BCPD) = -1$, suy ra AD là đường đối trung của tam giác ABC .

Bổ đề 2. BN và CM là các đường đối trung của tam giác ABC .

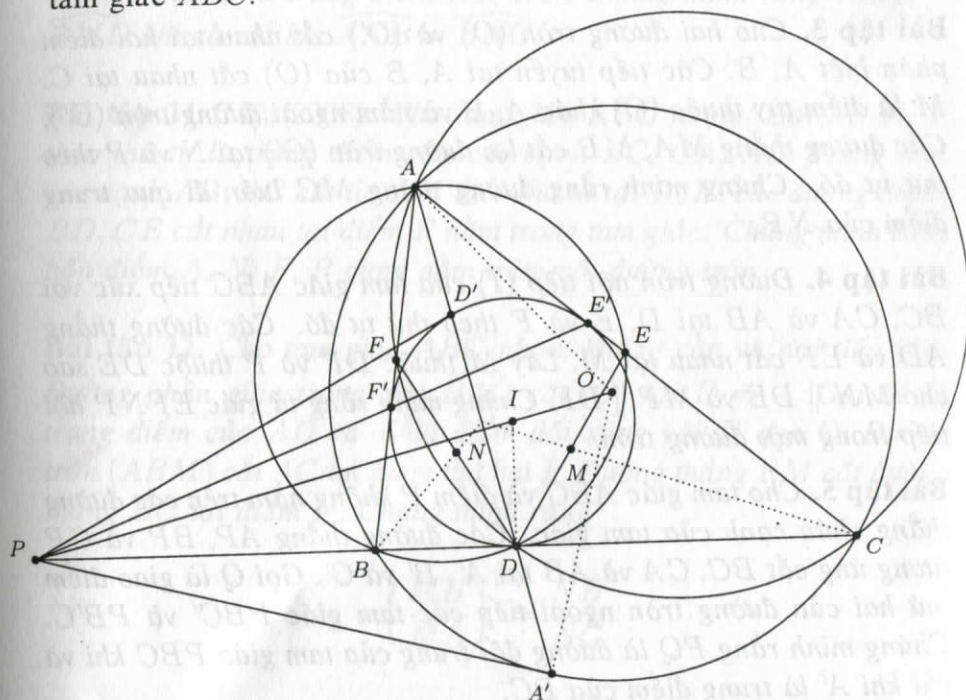
Thật vậy, gọi K là trung điểm của AC suy ra BK là đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC . Do tứ giác $AFDC$ nội tiếp nên tam giác BDF đồng dạng tam giác BAC , suy ra:

$$\frac{DB}{DM} = \frac{CB}{CA} \Leftrightarrow \frac{DB}{2DN} = \frac{CB}{2CK} \Leftrightarrow \frac{DB}{DN} = \frac{CB}{CK}.$$

Kết hợp với $\widehat{BDC} = \widehat{BCK}$, ta được tam giác DBN đồng dạng với tam giác CBK , suy ra:

$$\widehat{BDN} = \widehat{CBK}.$$

Do đó, theo Định lý 1, ta được BN là đường đối trung của tam giác ABC . Tương tự, ta được CM là đường đối trung kẻ từ đỉnh C của tam giác ABC .



Trở lại bài toán, theo Bổ đề 2 ta có BN, CM là đường đối trung của tam giác ABC nên AD, BN, CM đồng quy khi và chỉ khi AD là đường đối trung của tam giác ABC hay OI vuông góc với AD (theo Bổ đề 1). Từ đó suy ra điều phải chứng minh. $\square$

3. Bài tập đề nghị

Bài tập 1 (Việt Nam, 2001). Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi PQ là tiếp tuyến chung của $(O_1), (O_2)$ ($P \in (O_1), Q \in (O_2)$). Các tiếp tuyến tại P, Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt nhau tại điểm S , gọi H là điểm

đối xứng với B qua đường thẳng PQ . Chứng minh rằng S, A, H thẳng hàng.

Bài tập 2. Cho đường tròn cố định (O) và một điểm A nằm ngoài (O) . Xét hai điểm $B, C \in (O)$ sao cho tam giác ABC không cân tại A . Giả sử AO là đường đối trung của tam giác ABC . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Các tiếp tuyến tại A, B của (O) cắt nhau tại C . M là điểm tùy thuộc (O) khác A, B và nằm ngoài đường tròn (O') . Các đường thẳng MA, MB cắt lại đường tròn (O') tại N và P theo thứ tự đó. Chứng minh rằng đường thẳng MC luôn đi qua trung điểm của NP .

Bài tập 4. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA và AB tại D, E và F theo thứ tự đó. Các đường thẳng AD và EF cắt nhau tại M . Lấy M thuộc DF và P thuộc DE sao cho $MN \parallel DE$ và $MP \parallel DF$. Chứng minh rằng tứ giác $EFNP$ nội tiếp trong một đường tròn.

Bài tập 5. Cho tam giác ABC và điểm P không nằm trên các đường thẳng chứa cạnh của tam giác. Các đường thẳng AP, BP và CP tương ứng cắt BC, CA và AB tại A', B' và C' . Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC' và $PB'C$. Chứng minh rằng PQ là đường đối trung của tam giác PBC khi và chỉ khi A' là trung điểm của BC .

Bài tập 6. Chứng minh rằng tứ giác nội tiếp $ABCD$ là tứ giác điều hòa khi và chỉ khi AC là đường đối trung của các tam giác ABD, CBD .

Bài tập 7 (Dự tuyển IMO, 2003). Cho ba điểm A, B và C thẳng hàng theo thứ tự đó. Xét đường tròn ω đi qua A, C và có tâm không nằm trên đường thẳng AC . Các tiếp tuyến của ω tại A và C cắt nhau tại P , đoạn BP cắt ω tại Q . Chứng minh rằng phân giác của góc AQC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 8 (Ba Lan, 2000). Cho tam giác ABC cân tại C . Lấy điểm D trong tam giác sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$. Gọi E là trung điểm AB . Chứng minh rằng $\widehat{ADE} + \widehat{BDC} = \pi$.

Bài tập 9 (Mỹ, 2005). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . P là điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{PBC}$ và $\widehat{PCA} = \widehat{PCB}$. Lấy điểm Q trên đường thẳng BC sao cho $QA = QP$. Chứng minh rằng $\widehat{QAP} = 2\widehat{OQB}$.

Bài tập 10. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AC, BD . Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = \widehat{BMD}$ khi và chỉ khi $\widehat{ANB} = \widehat{BNC}$.

Bài tập 11 (Mỹ, 2008). Cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Trung trực các cạnh AB, AC cắt tia AM theo thứ tự tại D, E , các đường thẳng BD, CE cắt nhau tại điểm F nằm trong tam giác. Chứng minh rằng bốn điểm A, N, F, P cùng nằm trên một đường tròn.

Bài tập 12. Cho tam giác ABC nhọn, không cân và nội tiếp (O) . Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại $D \neq A$. Gọi M là trung điểm của AD và E là điểm đối xứng với D qua O . Đường tròn (ABM) cắt AC tại điểm thứ hai F . Đường thẳng FM cắt đường thẳng BC tại điểm N . Chứng minh rằng

$$\left(\frac{MB}{MA}\right)^2 = \frac{NB}{NC}.$$

Bài tập 13. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B của (O) cắt đường thẳng BC tại S . Đường tròn tâm S , bán kính SB cắt lại (O) tại D . Chứng minh BD là đường đối trung của tam giác ABC .

Bài tập 14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Phân giác trong và ngoài góc A lần lượt cắt đường thẳng BC tại D, E . Đường tròn đường kính DE cắt lại đường tròn (O) tại F . Đường thẳng AF cắt đường thẳng BC tại điểm M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt lại đường thẳng AC tại điểm N và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM cắt lại đường thẳng AB tại điểm P . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng MN, MP . Chứng minh rằng các đường thẳng AM, BJ, CI đồng quy tại một điểm.

Tài liệu tham khảo

- [1] Hạ Vũ Anh, *Đường đối trung*, Chuyên đề Báo cáo tại Hội thảo Toán sơ cấp năm 2010 tại Ba Vì, Hà Nội.
- [2] Nguyễn Văn Ban, Hoàng Chúng, *Hình học của tam giác*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1996.
- [3] Đoàn Quỳnh (chủ biên), *Tài liệu giáo khoa chuyên Toán*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2010.
- [4] I. F. Sharyghin, *Các bài toán hình học phẳng*, Nhà xuất bản Nauka, 1996.
- [5] Các nguồn tài liệu từ Internet:

www.mathscope.org;
www.diendantoanhoc.net;
www.mathlinks.org;
www.imo.org.yu.

ĐỊNH LÝ CASEY VÀ ỨNG DỤNG

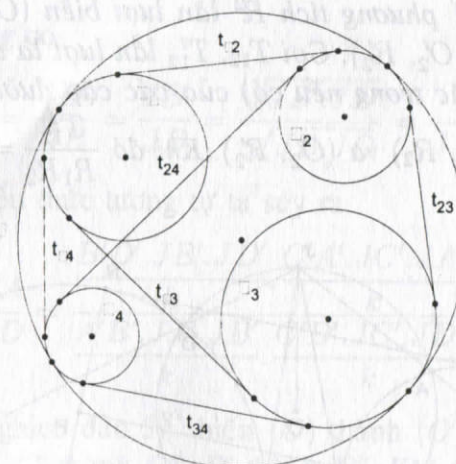
Nguyễn Văn Linh[†]

1. Giới thiệu

Định lý Casey được đặt theo tên nhà Toán học John Casey, hay còn được gọi là định lý Ptolemy mở rộng (xem [1]), được phát biểu như sau

Định lý 1. Cho bốn đường tròn C_i ($i = \overline{1, 4}$). Ký hiệu t_{ij} là độ dài của tiếp tuyến hai đường tròn C_i và C_j . Khi đó bốn đường tròn C_i cùng tiếp xúc với một đường tròn (hoặc một đường thẳng) C khi và chỉ khi

$$t_{12}t_{34} \pm t_{13}t_{42} \pm t_{14}t_{23} = 0.$$



Chú ý rằng tiếp tuyến được chọn của hai đường tròn C_i, C_j là tiếp tuyến chung ngoài khi và chỉ khi cả hai đường tròn C_i, C_j cùng tiếp xúc trong (hoặc ngoài) với C , là tiếp tuyến chung trong khi và chỉ

[†]Sinh viên Đại học Ngoại thương Hà Nội.

khi trong hai đường tròn C_i, C_j có một đường tròn tiếp xúc trong, một đường tròn tiếp xúc ngoài với C . Dấu của $t_{ij}t_{kl}$ là "+" khi và chỉ khi các đoạn thẳng nối hai tiếp điểm của C_i và C_j, C_k và C_l không cắt nhau, dấu "-" khi và chỉ khi ngược lại.

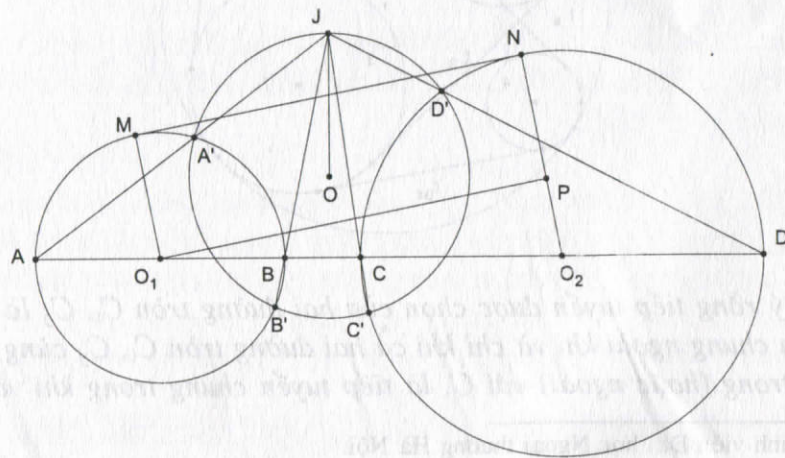
Đễ dàng nhận thấy khi bốn đường tròn trên suy biến thành đường tròn điểm thì định lý Casey trở thành định lý Ptolemy (xem [2]).

Khi ba đường tròn suy biến thành đường tròn điểm thì định lý Casey trở thành định lý Purser (xem [3]).

2. Chứng minh định lý

Lời giải sau dựa theo [4]. Ta sẽ phát biểu và chứng minh một bổ đề.

Bổ đề 1. Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) không chứa nhau. I là một điểm nằm ngoài hoặc nằm trong cả hai đường tròn. Phép nghịch đảo cực I phương tích R^2 lần lượt biến (O_1, R_1) , (O_2, R_2) thành (O'_1, R'_1) , (O'_2, R'_2) . Gọi T_{12}, T'_{12} lần lượt là độ dài tiếp tuyến chung ngoài (hoặc trong nếu có) của các cặp đường tròn (O_1, R_1) và (O'_1, R'_1) , (O_2, R_2) và (O'_2, R'_2) . Khi đó $\frac{T_{12}^2}{R_1 R_2} = \frac{T'^2_{12}}{R'_1 R'_2}$.



Chứng minh. Ta chỉ chứng minh cho trường hợp tiếp tuyến chung ngoài, trường hợp tiếp tuyến chung trong chứng minh tương tự.

Gọi (O, R) là đường tròn trực giao với (O_1) và (O_2) . (O) giao (O_1) tại A', B' , giao (O_2) tại C', D' . Lấy J trên (O) sao cho J nằm trên trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) . Gọi k là phương tích từ J đến hai đường tròn (O_1) và (O_2) . Phép nghịch đảo J_k^* biến A' thành A , B' thành B , C' thành C , D' thành D .

Do $A', B', C', D' \in (O)$ nên A, B, C, D thẳng hàng. Phép nghịch đảo bảo toàn độ lớn góc giữa hai đường cong tại giao điểm nên A, O_1, B và C, O_2, D thẳng hàng. Từ đó A, B, C, D nằm trên đường nối tâm O_1O_2 .

Không mất tính tổng quát giả sử A, B, C, D nằm trên O_1O_2 theo thứ tự, $R_1 < R_2$. Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) ($M \in (O_1), N \in (O_2)$). Gọi P là hình chiếu vuông góc của O_1 trên O_2N . Ta có

$$\begin{aligned} MN^2 &= O_1P^2 = O_1O_2^2 - O_2P^2 = O_1^2O_2^2 - (R_1 - R_2)^2 \\ &= (O_1O_2 + R_1 - R_2)(O_1O_2 - R_1 + R_2) = BD.CA. \end{aligned}$$

Ngoài ra, ta cũng có

$$\frac{B'D'}{BD} = \frac{JD'}{JB} = \frac{JB'}{JD} = \frac{\sqrt{JB' \cdot JD'}}{\sqrt{JB \cdot JD}} = \frac{k}{JB \cdot JD}.$$

Thiết lập các biểu thức tương tự ta suy ra

$$\frac{T_{12}^2}{R_1 R_2} = \frac{BD \cdot CA}{AB \cdot CD} = \frac{\frac{B'D' \cdot JB' \cdot JD'}{k} \cdot \frac{C'A' \cdot JC' \cdot JA'}{k}}{\frac{A'B' \cdot JA' \cdot JB'}{k} \cdot \frac{C'D' \cdot JC' \cdot JD'}{k}} = \frac{B'D' \cdot C'A'}{A'B' \cdot C'D'}$$

Bây giờ, phép nghịch đảo $\mathcal{I}_I^{R^2}$ biến (O) thành (O') , biến A' thành A'' , B' thành B'' , C' thành C'' , D' thành D'' . Khi đó (O') là đường tròn trực giao với (O'_1) và (O'_2) . Tương tự như trên, ta cũng chứng minh được

$$\frac{T_{12}'^2}{R_1' R_2'} = \frac{B'' D'' . C'' A''}{A'' B'' . C'' D''} = \frac{B' D' . C' A'}{A' B' . C' D'}.$$

$$\text{Vậy } \frac{T_{12}^2}{R_1 R_2} = \frac{T_{12}'^2}{R_1' R_2'}.$$

☐

Trở lại bài toán. Trước tiên ta chứng minh chiều thuận của định lý Casey cho trường hợp cả bốn đường tròn C_i đều tiếp xúc trong với C , các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Ký hiệu r_i , O_i lần lượt là bán kính và tâm của các đường tròn C_i ; r , O là bán kính và tâm của đường tròn C . Không mất tính tổng quát, giả sử $r_4 = \min\{r_i\}$. Ta nhận thấy các đường tròn $(O_1, r_1 - r_4)$, $(O_2, r_2 - r_4)$, $(O_3, r_3 - r_4)$, $(O_4, 0)$ cùng tiếp xúc với đường tròn $(O, r - r_4)$ và độ dài tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(O_i, r_i - k)$, $(O_j, r_j - k)$ ($k \in (0, \min\{r_i, r_j\})$) bằng t_{ij} . Do đó ta chỉ cần chứng minh chiều thuận của định lý Casey cho bốn đường tròn $(O_1, r_1 - r_4)$, $(O_2, r_2 - r_4)$, $(O_3, r_3 - r_4)$, $(O_4, 0)$ (kí hiệu là Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 với bán kính lần lượt là $R_1, R_2, R_3, 0$).

Xét phép nghịch đảo $\mathcal{I}_{O_4}^{R_4^2}$ biến Q_1 thành Q'_1 , Q_2 thành Q'_2 , Q_3 thành Q'_3 , $(O, r - r_4)$ thành l và Q'_1, Q'_2, Q'_3 cùng tiếp xúc một phía với l . Gọi t'_{ij} là độ dài tiếp tuyến chung ngoài của Q'_i và Q'_j . Không mất tổng quát giả sử tiếp điểm của Q'_2 và l nằm trên đoạn thẳng nối hai tiếp điểm của Q'_1 và Q'_3 với l . Ta có $t'_{12} + t'_{23} - t'_{13} = 0$.

Áp dụng Bổ đề 1, $t_{ij} = t'_{ij} \cdot \sqrt{\frac{R_i \cdot R_j}{R'_i \cdot R'_j}} \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$. Ngoài ra, ta cũng có

$$\frac{R'_i}{R_i} = \frac{t'_{4i}}{t_{4i}} = \frac{t'_{4i} \cdot t_{4i}}{t_{4i}^2} = \frac{R^2}{t_{4i}^2},$$

do vậy $t_{4i} = R \cdot \sqrt{\frac{R_i}{R'_i}}$. Từ đây suy ra

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} - t_{13} \cdot t_{24} = (t'_{12} + t'_{23} - t'_{13}) \cdot R \sqrt{\frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R'_1 \cdot R'_2 \cdot R'_3}} = 0.$$

Chiều thuận được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh chiều đảo. Giả sử $t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} - t_{13} \cdot t_{24} = 0$. Ta sẽ chứng minh $Q_1, Q_2, Q_3, (O_4, 0)$ cùng tiếp xúc với một đường tròn.

Sử dụng phép nghịch đảo $\mathcal{I}_{O_4}^{R_4^2}$ ta cũng suy ra $t'_{12} + t'_{23} - t'_{13} = 0$.

Không mất tổng quát giả sử $R'_3 = \min\{R'_1, R'_2, R'_3\}$. Cùng giảm bán kính ba đường tròn Q'_1, Q'_2, Q'_3 một đoạn R'_3 ta được ba đường tròn (I_1, q_1) , (I_2, q_2) , $(I_3, 0)$. Ta sẽ tìm quỹ tích các điểm I_3 sao cho $t'_{13} - t'_{23} = t'_{12}$.

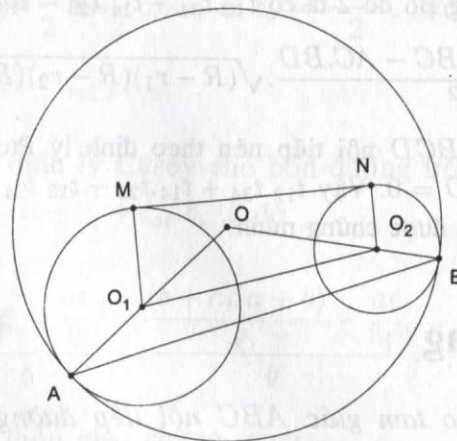
Tập hợp các điểm sao cho tiếp tuyến kẻ từ điểm đó đến (I_1, q_1) bằng t'_{13} là đường tròn tâm I_1 , bán kính $\sqrt{q_1^2 + t_{13}^2}$, tập hợp các điểm sao cho tiếp tuyến kẻ từ điểm đó đến (I_2, q_2) bằng t'_{23} là đường tròn tâm I_2 , bán kính $\sqrt{q_2^2 + t_{23}^2}$. Hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm nằm trên tiếp tuyến chung ngoài của (I_1, q_1) và (I_2, q_2) .

Như thế I_3 nằm trên tiếp tuyến chung ngoài của (I_1, q_1) và (I_2, q_2) . Suy ra Q'_1, Q'_2, Q'_3 cùng tiếp xúc với một đường thẳng. Nghĩa là tồn tại một đường tròn đi qua O_4 và tiếp xúc với Q_1, Q_2, Q_3 . Vậy tồn tại một đường tròn tiếp xúc với bốn đường tròn C_i và định lý Casey được chứng minh.

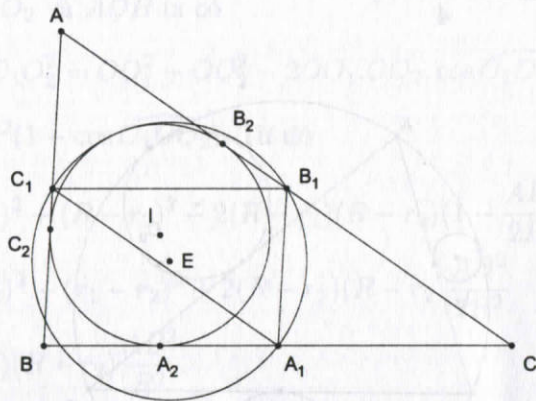
Nhận xét. Chiều thuận của bài toán có thể chứng minh theo hướng sau đây không sử dụng phép nghịch đảo, được coi là hệ quả của định lý Ptolemy.

Bổ đề 2. Cho hai đường tròn $C_1(O_1, r_1)$ và $C_2(O_2, r_2)$ cùng tiếp xúc với $C(O, R)$ lần lượt tại hai điểm A, B . Khi đó độ dài tiếp tuyến chung (trong hoặc ngoài) của C_1 và C_2 được tính bởi công thức

$$t_{12} = \frac{AB}{R} \sqrt{(R \pm r_1)(R \pm r_2)}.$$



Bài toán 2 (Định lý Feuerbach). Chứng minh rằng đường tròn Euler của tam giác tiếp xúc với các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp tam giác đó.



Chứng minh. Ta chứng minh bài toán cho trường hợp đường tròn nội tiếp. Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Giả sử ta có tam giác ABC với A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB ; A_2, B_2, C_2 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với BC, CA, AB . Đặt độ dài các cạnh tam giác ABC lần lượt là a, b, c . Áp dụng định lý Casey cho bốn đường tròn $(I), (A_1, 0), (B_1, 0), (C_1, 0)$ với độ dài các tiếp tuyến chung lần lượt là $B_1C_1 = \frac{a}{2}, C_1A_1 = \frac{b}{2}, A_1B_1 = \frac{c}{2}, A_1A_2 = \frac{|b-c|}{2}, B_1B_2 = \frac{|c-a|}{2}, C_1C_2 = \frac{|a-b|}{2}$.

Ta có thể chọn các dấu "+", "-" sao cho

$$a|b-c| \pm b|c-a| \pm c|a-b| = 0$$

nên tồn tại đường tròn tiếp xúc với $(I), (A_1, 0), (B_1, 0), (C_1, 0)$ hay đường tròn Euler của tam giác ABC tiếp xúc với (I) . $\square$

Bài toán 3. Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) có A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . F là tiếp điểm của (I) và đường tròn Euler (E) . Khi đó ta có thể chọn các dấu "+", "-" sao cho $FA_1 \pm FB_1 \pm FC_1 = 0$.

Chứng minh. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn Euler và (I) . Áp dụng Bổ đề 2 cho đường tròn (I) và $(B_1, 0)$ ta có

$$B_1F = \frac{R}{\sqrt{(R-r)R}} \cdot B_1B_2,$$

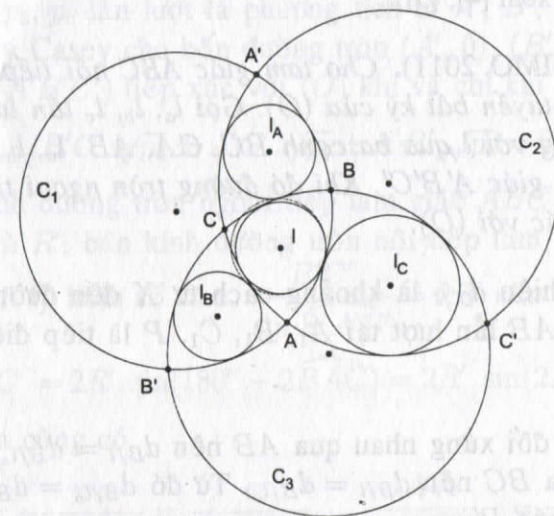
$$C_1F = \frac{R}{\sqrt{(R-r)R}} \cdot C_1C_2,$$

$$A_1F = \frac{R}{\sqrt{(R-r)R}} \cdot A_1A_2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} A_1F \pm B_1F \pm C_1F &= \frac{R}{\sqrt{(R-r)R}} \cdot (A_1A_2 \pm B_1B_2 \pm C_1C_2) \\ &= \frac{R}{2\sqrt{(R-r)R}} \cdot (|b-c| \pm |c-a| \pm |a-b|) \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

Bài toán 4 (Đường tròn Hart). Cho ba đường tròn C_1, C_2, C_3 cắt nhau lần lượt tại các cặp điểm $(A, A'), (B, B'), (C, C')$. Gọi $(I), (I_A), (I_B), (I_C)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác $ABC, ABC, AB'C, ABC'$. Khi đó tồn tại một đường tròn tiếp xúc ngoài với $(I_A), (I_B), (I_C)$ và tiếp xúc trong với (I) , gọi là đường tròn Hart.



Lời giải. Ký hiệu t_{ij} là độ dài tiếp tuyến chung ngoài, t'_{ij} là độ dài tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn (I_i) và (I_j) . Do (I_A) , (I_B) , (I_C) , (I) cùng tiếp xúc với C_1 nên

$$t_{AI}.t'_{BC} + t_{AB}.t'_{CI} - t'_{AC}.t_{BI} = 0.$$

Tương tự, bốn đường tròn cùng tiếp xúc với C_2 nên

$$t_{AC}.t'_{BI} + t'_{BC}.t_{AI} - t_{AB}.t_{CI} = 0.$$

Bốn đường tròn cùng tiếp xúc với C_3 nên

$$t_{BC}.t'_{AI} + t'_{AB}.t_{CI} - t'_{AC}.t_{BI} = 0.$$

Từ ba đẳng thức trên suy ra

$$t_{AC}.t'_{BI} - t_{BC}.t'_{AI} - t_{AB}.t_{CI} = 0$$

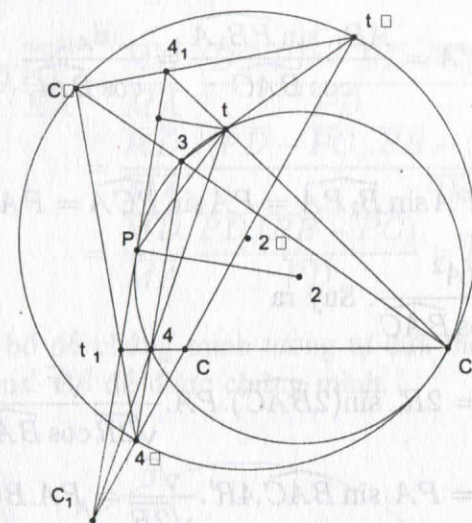
(lưu ý dấu “+” hay “-” trong các đẳng thức trên không quan trọng, có thể đảo dấu nhưng phải thoả mãn trong một đẳng thức tồn tại cả “+” và “-”). Theo định lý Casey dạng đảo, tồn tại một đường tròn tiếp xúc ngoài với ba đường tròn (I_A) , (I_B) , (I_C) và tiếp xúc trong với (I) . $\square$

Nhận xét. Chú ý rằng có tất cả tám đường tròn Hart ứng với ba đường tròn cho trước (xem [4], [5]).

Bài toán 5 (IMO 2011). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . l là tiếp tuyến bất kỳ của (O) . Gọi l_a , l_b , l_c lần lượt là đường thẳng đối xứng với l qua ba cạnh BC , CA , AB . l_a , l_b , l_c cắt nhau tạo thành tam giác $A'B'C'$. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ tiếp xúc với (O) .

Lời giải. Ký hiệu $d_{X/l}$ là khoảng cách từ X đến đường thẳng l . l cắt BC , CA , AB lần lượt tại A_1 , B_1 , C_1 . P là tiếp điểm của l và (O) .

Do l_c và l đối xứng nhau qua AB nên $d_{B/l} = d_{B/l_c}$, l_a và l đối xứng nhau qua BC nên $d_{B/l} = d_{B/l_a}$. Từ đó $d_{B/l_a} = d_{B/l_c}$ hay $B'B$ là phân giác góc B' .



Tương tự suy ra AA' , BB' , CC' đồng quy tại tâm nội tiếp I của tam giác $A'B'C'$. Mặt khác,

$$\begin{aligned} (B'A', B'C') &\equiv (B'A', BA) + (BA, BC) + (BC, B'C') \\ &\equiv (BA, l) + (BA, BC) + (l, BC) \\ &\equiv 2(BA, BC) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Do đó $\widehat{C'IA'} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{C'B'A'} = 180^\circ - \widehat{ABC}$. Suy ra $I \in (O)$.

Gọi p_a , p_b , p_c lần lượt là phương tích từ A' , B' , C' tới (O) . Áp dụng định lý Casey cho bốn đường tròn (A', O) , (B', O) , (C', O) và (O) , ta có $(A'B'C')$ tiếp xúc với (O) khi và chỉ khi

$$B'C' \cdot \sqrt{p_a} \pm A'C' \cdot \sqrt{p_b} \pm A'B' \cdot \sqrt{p_c} = 0. \quad (1)$$

Đặt bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $A'B'C'$ lần lượt là R và R' , bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$ là r . Theo định lý hàm số sine, $\frac{B'C'}{\sin \widehat{B'A'C'}} = 2R'$ nên

$$B'C' = 2R' \cdot \sin(180^\circ - 2\widehat{BAC}) = 2R' \cdot \sin(2\widehat{BAC}).$$

Ngoài ra, ta cũng có

$$A'I = \frac{r}{\sin \widehat{B'A'I}} = \frac{r}{\cos \widehat{BAC}}, \quad \frac{A'A}{\sin \widehat{AB_1A'}} = \frac{AB_1}{\sin \widehat{C'A'I}},$$

nên

$$A'A = \frac{AB_1 \cdot \sin \widehat{PB_1A}}{\cos \widehat{BAC}} = \frac{d_{A/I}}{\cos \widehat{BAC}}.$$

Lại có

$$d_{A/I} = PA \sin \widehat{B_1PA} = PA \sin \widehat{PCA} = PA \cdot \frac{PA}{2R},$$

$$\text{nên } A'A = \frac{PA^2}{2R \cos \widehat{BAC}}. \text{ Suy ra}$$

$$\begin{aligned} B'C' \cdot \sqrt{AA' \cdot AI} &= 2R' \cdot \sin(2\widehat{BAC}) \cdot PA \cdot \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2R \cos \widehat{BAC}}} \\ &= PA \cdot \sin \widehat{BAC} \cdot 4R' \cdot \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2R}} = PA \cdot BC \cdot 2R' \cdot \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2R} \cdot R}. \end{aligned}$$

Tương tự và áp dụng định lý Ptolemy, ta suy ra

$$\begin{aligned} B'C' \cdot \sqrt{p_a} \pm A'C' \cdot \sqrt{p_b} \pm A'B' \cdot \sqrt{p_c} \\ = 2R' \cdot \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2R} \cdot R} (PA \cdot BC \pm PB \cdot AC \pm PC \cdot AB) = 0. \end{aligned}$$

Vậy $(A'B'C')$ tiếp xúc với (O) theo (1). $\square$

Bài toán 6 (Bổ đề Thébault). Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) , nội tiếp (O) . Một đường tròn (E) tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q . Khi đó I là trung điểm PQ .

Lời giải. Ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 3 (Định lý Cristea). Gọi D, E, F lần lượt là ba điểm nằm trên các cạnh BC, CA, AB của $\triangle ABC$ và $M \in AD$. Khi đó EF đi qua M khi và chỉ khi

$$\overline{DC} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} + \overline{BD} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{MA}}.$$

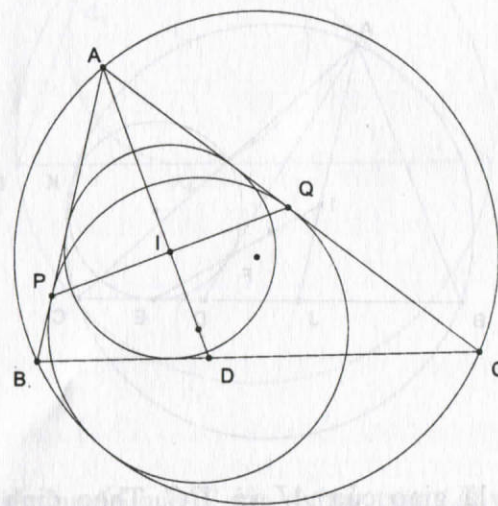
Chứng minh. Giả sử $M \in EF$. Gọi $\{P\} \equiv EF \cap BC$. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle DAB$ ứng với đường thẳng $\overline{PMF}$ và $\overline{PEM}$ ta có

$$\overline{DC} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} = \overline{DC} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}, \quad \overline{BD} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \overline{BD} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{MA}},$$

suy ra

$$\begin{aligned} \overline{DC} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} + \overline{BD} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} &= \frac{\overline{MD}}{\overline{MA}} \cdot \frac{(\overline{DC} \cdot \overline{PB} + \overline{BD} \cdot \overline{PC})}{\overline{PD}} \\ &= \frac{\overline{MD}}{\overline{MA}} \cdot \frac{[(\overline{PD} - \overline{PC}) \cdot \overline{PB} + (\overline{PB} - \overline{PD}) \cdot \overline{PC}]}{\overline{PD}} \\ &= \frac{\overline{MD}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{PD} \cdot (\overline{PB} - \overline{PC})}{\overline{PD}} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{MA}}. \end{aligned}$$

Chiều đảo của bổ đề chứng minh tương tự dựa theo chiều đảo của định lý Menelaus. Bổ đề được chứng minh. $\square$



Trở lại bài toán. Áp dụng định lý Casey cho bốn đường tròn $(A, 0)$, $(B, 0)$, $(C, 0)$, (E) ta có $AP \cdot BC = AB \cdot CQ + AC \cdot BP$ hay $AP = \frac{c(b - AP) + b(c - AP)}{a}$, suy ra $AP = \frac{2bc}{a + b + c}$.

Gọi $\{D\} \equiv AI \cap BC$, ta có $\frac{DI}{AI} = \frac{a}{b+c}$, $CD = \frac{ab}{b+c}$, $BD = \frac{ac}{b+c}$. Áp dụng Bổ đề 3, ta cần chứng minh

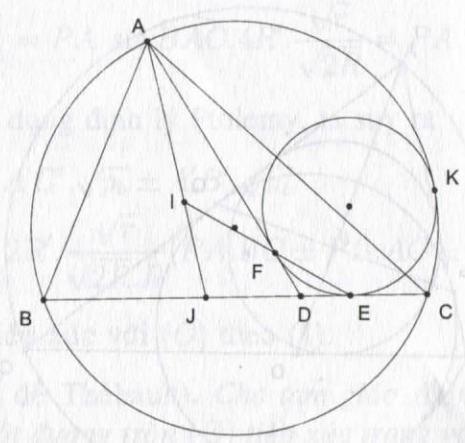
$$CD \cdot \frac{BP}{PA} + BD \cdot \frac{CQ}{AQ} = BC \cdot \frac{DI}{AI},$$

hay là

$$\frac{ab}{b+c} \cdot \frac{c - \frac{2bc}{a+b+c}}{2bc} + \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{b - \frac{2bc}{a+b+c}}{2bc} = a \cdot \frac{a}{b+c},$$

đúng sau một số biến đổi. Suy ra $I \in PQ$. Mà tam giác APQ cân tại A có phân giác AI nên I là trung điểm PQ . $\square$

Bài toán 7 (Bổ đề Sawayama). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . D là điểm bất kỳ trên BC . Một đường tròn ω tiếp xúc với các tia DC, DA lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với (O) . Khi đó I nằm trên đường thẳng EF .



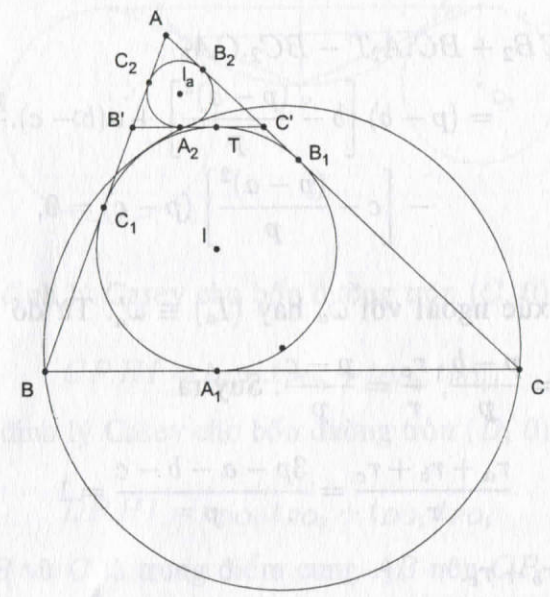
Lời giải. Gọi J là giao của AI và BC . Theo định lý Menelaus, I, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{EJ}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{IA}{IJ} = 1 \Leftrightarrow \frac{EJ}{FA} \cdot \frac{IA}{IJ} = 1.$$

Mà $\frac{IA}{IJ} = \frac{b+c}{a}$ nên ta cần chứng minh $a.FA = (b+c)EJ$. (1) Áp dụng định lý Casey cho bốn đường tròn $(A, 0), (B, 0), (C, 0), \omega$ ta có $AF.BC + AB.CE = AC.BE$, hay là $a.AF + c.(BC - BE) = b.BE \Leftrightarrow a.AF + ac = BE(b+c)$.

Do $BJ = \frac{ac}{b+c}$ nên $a.AF + (b+c)BJ = BE(b+c)$, từ đó $a.AF = (b+c)(BE - BJ) = (b+c)EJ$. Như vậy (1) đúng, tức là I nằm trên đường thẳng EF . $\square$

Bài toán 8. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi ω_a là đường tròn qua hai điểm B, C và tiếp xúc với (I) , ω'_a là đường tròn tiếp xúc với các tia AB, AC và tiếp xúc ngoài với ω_a . Tương tự ta xác định ω'_b, ω'_c . Gọi r, r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính các đường tròn $(I), \omega'_a, \omega'_b, \omega'_c$. Khi đó $r = r_a + r_b + r_c$.



Lời giải. Kẻ tiếp tuyến qua T của đường tròn (I) và song song với BC , cắt AB, AC lần lượt tại B', C' . Ta chứng minh đường tròn nội tiếp tam giác $AB'C'$ là ω'_a .

Gọi A_1, B_1, C_1 là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB ; A_2, B_2, C_2 là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I_a) của tam giác $AB'C'$ với $B'C', C'A, AB'$. Kí hiệu p, p' là nửa chu vi tam giác $ABC, AB'C'$. Ta có $p' = AB_1 = p - a$ nên hai tam giác $AB'C'$ và ABC đồng dạng theo tỉ số $\frac{p-a}{p}$, suy ra $B'C' = \frac{(p-a)a}{p}$. Từ đây ta được

$$BC_2 = c - AC_2 = p' - B'C' = c - \left[(p-a) - \frac{(p-a)a}{p} \right] = c - \frac{(p-a)^2}{p}.$$

Tương tự, $CB_2 = b - \frac{(p-a)^2}{p}$. Ngoài ra, với giả thiết $b > c$ thì

$$A_2T = B'C' - 2B'A_2 = \frac{(p-a)a}{p} - 2 \left[p - a - \frac{(p-a)b}{p} \right] = (b-c) \cdot \frac{p-a}{p}.$$

Áp dụng định lý Casey cho bốn đường tròn $(B, 0)$, $(C, 0)$, (I) , (I_a) ta có

$$\begin{aligned} BA_1 \cdot CB_2 + BC \cdot A_2T - BC_2 \cdot CA_1 \\ = (p-b) \left[b - \frac{(p-a)^2}{p} \right] + a(b-c) \cdot \frac{p-a}{p} \\ - \left[c - \frac{(p-a)^2}{p} \right] (p-c) = 0, \end{aligned}$$

nên (I_a) tiếp xúc ngoài với ω_a hay $(I_a) \equiv \omega'_a$. Từ đó $\frac{r_a}{r} = \frac{p-a}{p}$.

Tương tự, $\frac{r_b}{r} = \frac{p-b}{p}$, $\frac{r_c}{r} = \frac{p-c}{p}$. Suy ra

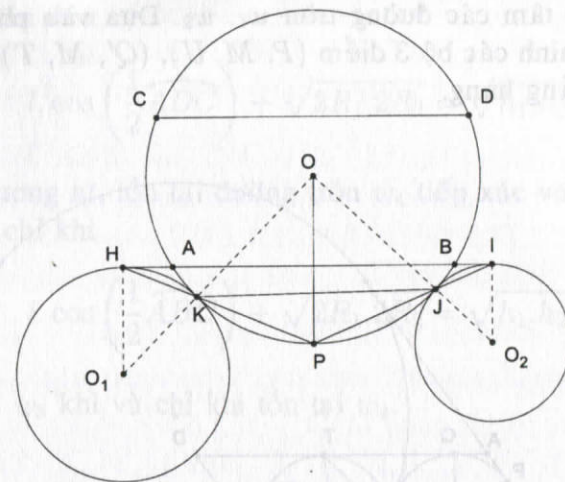
$$\frac{r_a + r_b + r_c}{r} = \frac{3p - a - b - c}{p} = 1$$

hay $r = r_a + r_b + r_c$. $\square$

Bài toán 9 (Juan Carlos). Gọi AB và CD là hai dây cung song song của đường tròn (O) . Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cùng tiếp xúc ngoài với (O) và có AB là tiếp tuyến chung sao cho (O_1) , (O_2) và CD nằm khác phía với AB . Ký hiệu t_{PO_i} là tiếp tuyến kẻ từ P tới đường tròn (O_i) . Khi đó $t_{CO_1} + t_{CO_2} = t_{DO_1} + t_{DO_2}$.

Lời giải. Gọi I, J, H, K lần lượt là tiếp điểm của (O_2) , (O_1) với AB , (O) và P là giao điểm của HK và (O) . Do K là tâm vị tự của (O) và (O_1) nên $OP \parallel O_1A$ hay $OP \perp AB$, suy ra P là điểm chính giữa cung AB . Tương tự suy ra $HK, IJ, (O)$ đồng quy tại P .

Mặt khác, $\widehat{AHK} = \frac{1}{2}\widehat{HO_1K} = \frac{1}{2}\widehat{KOP} = \widehat{KJP}$ nên tứ giác $HKJI$ nội tiếp. Từ đó suy ra P nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1) và (O_2) , suy ra $t_{PO_1} = t_{PO_2}$. (1)



Áp dụng định lý Casey cho bốn đường tròn $(C, 0)$, $(P, 0)$, (O_1) , (O_2) ta có

$$CP \cdot HI = t_{CO_1} \cdot t_{PO_2} + t_{CO_2} \cdot t_{PO_1}.$$

Lại áp dụng định lý Casey cho bốn đường tròn $(D, 0)$, $(P, 0)$, (O_1) , (O_2) ta có

$$DP \cdot HI = t_{DO_1} \cdot t_{PO_2} + t_{DO_2} \cdot t_{PO_1}.$$

Do $CD \parallel AB$ và C là trung điểm cung AB nên $CP = DP$, từ đó

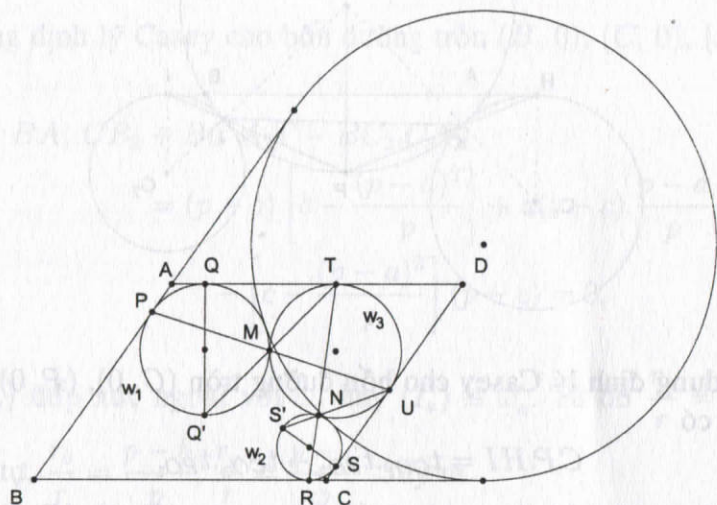
$$t_{CO_1} \cdot t_{PO_2} + t_{CO_2} \cdot t_{PO_1} = t_{DO_1} \cdot t_{PO_2} + t_{DO_2} \cdot t_{PO_1}.$$

Kết hợp với (1) suy ra $t_{CO_1} + t_{CO_2} = t_{DO_1} + t_{DO_2}$. $\square$

Bài toán 10 (Iran TST 2012). Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi w_1, w_2 lần lượt là hai đường tròn tiếp xúc với các cặp đoạn thẳng AB và AD , BC và CD . Giả sử tồn tại một đường tròn tiếp xúc với đường thẳng AD và DC và tiếp xúc ngoài với w_1 và w_2 . Khi đó tồn tại một đường tròn tiếp xúc với đường thẳng AB và BC và tiếp xúc ngoài với w_1 và w_2 .

Lời giải. Gọi w_3 là đường tròn tiếp xúc với w_1, w_2, AD, DC ; R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của w_1, w_2, w_3 ; h_1, h_2 là 2 đường cao của hình bình hành $ABCD$ ứng với các cạnh AB, AD ; M, N, P, Q, R, S, T, U lần lượt là $w_1 \cap w_3, w_2 \cap w_3, AB \cap w_1, AD \cap w_1, BC \cap w_2, CD \cap w_2, AD \cap w_3, CD \cap w_3$; Q', S' là điểm đối xứng

với Q, S qua tâm các đường tròn w_1, w_2 . Dựa vào phép vị tự dễ dàng chứng minh các bộ 3 điểm $(P, M, U), (Q', M, T), (T, N, R), (U, N, S')$ thẳng hàng.



Lại gọi l là độ dài tiếp tuyến chung ngoài của w_1, w_2 ; l_1, l_2 là độ dài tiếp tuyến kẻ từ U, T tới các đường tròn w_1, w_2 . Ta có

$$TQ = \sqrt{TM \cdot TQ'}, US = \sqrt{UN \cdot US'}$$

và

$$l_1 = \sqrt{UM \cdot UP}, l_2 = \sqrt{TN \cdot TR}.$$

Theo định lý Casey, tồn tại w_3 đi qua U, T và tiếp xúc với w_1, w_2 nên

$$l \cdot TU + TQ \cdot US = l_1 \cdot l_2,$$

do đó

$$l \cdot TU + \sqrt{TM \cdot TQ' \cdot UN \cdot US'} = \sqrt{UM \cdot UP \cdot TN \cdot TR}.$$

Áp dụng định lý hàm số sine, ta có

$$\begin{aligned} l \cdot 2R_3 \cdot \sin \left(90 - \frac{1}{2} \widehat{ADC} \right) + 2R_3 \sqrt{US' \cdot \sin \widehat{NUS} \cdot TQ' \cdot \sin \widehat{MTQ}} \\ = 2R_3 \cdot \sqrt{UP \cdot \sin \widehat{MUS} \cdot TR \cdot \sin \widehat{NTQ}}. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$l \cdot \cos \left(\frac{1}{2} \widehat{ADC} \right) + \sqrt{2R_1 \cdot 2R_2} = \sqrt{h_1 \cdot h_2}.$$

Một cách tương tự, tồn tại đường tròn w_4 tiếp xúc với w_1, w_2, AB, BC khi và chỉ khi

$$l \cdot \cos \left(\frac{1}{2} \widehat{ABC} \right) + \sqrt{2R_1 \cdot 2R_2} = \sqrt{h_1 \cdot h_2}.$$

Vậy tồn tại w_3 khi và chỉ khi tồn tại w_4 . $\square$

4. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . E là một điểm nằm trên cung AC chứa B . Đường tròn (O') tiếp xúc với AC và tiếp xúc với (O) tại E . Kẻ tiếp tuyến DT tới (O') . Chứng minh rằng $DT = DA$.

Bài 2 (Hongkong 2009). Cho tam giác ABC vuông tại C , đường cao CD . Đường tròn ω tiếp xúc với các cạnh AC, AB lần lượt tại N, M và tiếp xúc ngoài với đường tròn đường kính BC . Chứng minh rằng $BD \cdot CN + BC \cdot DM = CD \cdot BM$ và $BM = BC$.

Bài 3 (Kostas Vitas). Cho đường tròn (O) đường kính AB . P, Q là hai điểm bất kỳ trên (O) và khác phía với AB . Kẻ $QT \perp AB$. PC, PD lần lượt là tiếp tuyến kẻ từ P đến đường tròn đường kính AT, BT . Chứng minh rằng $PC + PD = PQ$.

Bài 4. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) , nội tiếp đường tròn ω . ω_a là đường tròn tiếp xúc trong với ω và tiếp xúc với các cạnh AB, AC . AI giao ω lần thứ hai tại S . Kẻ tiếp tuyến ST tới ω_a . Chứng minh rằng $\frac{ST}{SA} = \frac{|b-c|}{b+c}$.

Bài 5 (Iran 2009). Hai đường tròn C_1 và C_2 có bán kính bằng nhau và cắt nhau tại hai điểm. Một đường thẳng l lần lượt cắt C_1, C_2 tại các điểm theo thứ tự A, B, C, D ($A, C \in C_2, B, D \in C_1$). Dựng

hai đường tròn ω_1 và ω_2 sao cho hai đường tròn cùng tiếp xúc ngoài với C_1 , tiếp xúc trong với C_2 và cùng tiếp xúc khác phía với l . Giả sử ω_1 và ω_2 tiếp xúc với nhau. Chứng minh rằng $AB = CD$.

Bài 6. Cho hai đường tròn ω_1 và ω_2 tiếp xúc ngoài với nhau tại I và cùng tiếp xúc trong với ω . Tiếp tuyến chung ngoài của ω_1 và ω_2 giao ω tại B, C . Tiếp tuyến chung tại I cắt ω tại A sao cho A và I nằm cùng một phía đối với BC . Chứng minh rằng I là tâm nội tiếp tam giác ABC .

Bài 7. Cho đường tròn (O) . (O_1) và (O_2) cùng tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc ngoài nhau tại X . Tiếp tuyến chung tại X của hai đường tròn cắt (O) tại A và B . Kí hiệu t_{12} là độ dài tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) . Chứng minh rằng $\frac{1}{XA} + \frac{1}{XB} = \frac{2}{t_{12}}$.

Bài 8 (Thébault). Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I, r) và nội tiếp đường tròn (O) . D là một điểm nằm trên cạnh BC . Đường tròn ω_1 bán kính r_1 tiếp xúc với các tia DA, DB và tiếp xúc trong với (O) , đường tròn ω_2 bán kính r_2 tiếp xúc với các tia DA, DC và tiếp xúc trong với (O) . Đặt $\widehat{ADB} = \alpha$. Chứng minh rằng $r_1 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} + r_2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} = r$.

Bài 9 (Luis González). Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi (I) và (O) lần lượt là đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC . P là điểm bất kỳ trên (I) , XYZ là tam giác pedal của P ứng với tam giác ABC . Các đường tròn C_1, C_2, C_3 lần lượt tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB tại X, Y, Z và tiếp xúc với các cung BC, CA, AB không chứa đỉnh đối diện. Gọi T_{12}, T_{23}, T_{31} lần lượt là độ dài các tiếp tuyến chung ngoài của C_1, C_2, C_3 . Chứng minh rằng $T_{12} + T_{23} + T_{31} = \frac{35}{16}a$.

Bài 10 (Lev Emelyanov). Cho ba điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC . Dựng các đường tròn $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ lần lượt tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 và tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC tại các điểm nằm trên cung không chứa A, B, C . Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc ngoài với $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ và tiếp xúc với đường

tròn nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Tài liệu tham khảo

- [1] Casey's theorem, from Wolfram Mathworld
<http://mathworld.wolfram.com/CaseysTheorem.html>
- [2] Ptolemy's theorem, from Wolfram Mathworld
<http://mathworld.wolfram.com/PtolemysTheorem.html>
- [3] Purser's theorem, from Wolfram Mathworld
<http://mathworld.wolfram.com/PursersTheorem.html>
- [4] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, New York, 1965.
- [5] Hart circle, from Wolfram Mathworld
<http://mathworld.wolfram.com/HartCircle.html>
- [6] Art of Problem Solving Forum
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/portal.php>
- [7] Lev Emelyanov, *A Feuerbach type theorem on six circles*, Forum Geometricorum Vol. 1, 2001.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TỒN TẠI TRONG TỔ HỢP

Nguyễn Tất Thu†

Chủ đề tổ hợp thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi và đây là chủ đề được đánh giá là khó nhất trong đề thi. Về toán tổ hợp ta thường gặp bài toán ở dạng yêu cầu chứng minh tồn tại (hoặc không tồn tại) một trạng thái, một cấu hình tổ hợp thoả một tính chất nào đó. Nội dung cũng như phương pháp giải các dạng toán này rất phong phú và đa dạng. Nhằm giúp các em học sinh có được hệ thống tư duy để tìm hướng giải cho dạng toán này, chúng tôi hệ thống một số phương pháp giải bài toán tồn tại, để qua đó học sinh có được cái nhìn tổng thể về dạng toán này.

1. Sử dụng nguyên lí Dirichle

Nguyên lí Dirichle (hay là nguyên lí chuồng thỏ) được phát biểu hết sức đơn giản nhưng lại có nhiều ứng dụng trong toán học và đặc biệt nguyên lí Dirichle là một công cụ mạnh để chứng minh bài toán tồn tại. Sau đây, chúng ta đi xét một số ứng dụng của nguyên lí Dirichle cho bài toán tồn tại.

1.1. Nguyên lí Dirichle

Nếu nhốt $n + 1$ con thỏ vào n chuồng thì có một chuồng chứa ít nhất 2 con thỏ.

†Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai.

1.2. Nguyên lí Dirichle mở rộng

Nếu nhốt n con thỏ vào m chuồng ($m \leq n$) thì có một chuồng chứa ít nhất $\lceil \frac{n+m-1}{m} \rceil$ con.

1.3. Nguyên lí Dirichle cho tập hợp

Cho S là tập hợp hữu hạn. $S_1, S_2, \dots, S_m$ là các tập con của S sao cho $\sum_{i=1}^m |S_i| > k \cdot |S|$. Khi đó tồn tại một phần tử $x \in S$ sao cho x thuộc ít nhất trong $k + 1$ tập của họ $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$.

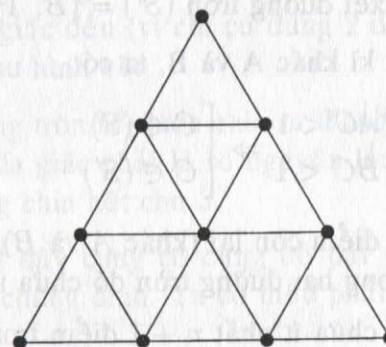
1.4. Nguyên lí Dirichle trong hình học

Cho một hình phẳng (H) và $(H_i), i = \overline{1, n}$ là các hình phẳng nằm trong (H) . Kí hiệu S, S_i là diện tích của các hình phẳng (H) và (H_i) . Khi đó, nếu $S < \sum_{i=1}^n S_i$ thì tồn tại hai hình phẳng $(H_i), (H_j)$ có giao khác rỗng với $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Để sử dụng nguyên lí Dirichle, ta cần tạo ra số chuồng và số thỏ.

1.5. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Trong một tam giác đều cạnh bằng 3 cho 2012 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác đều cạnh bằng 1 chứa trong nó ít nhất 224 điểm trong 2012 điểm đã cho.



Lời giải. Ta có: $\left[\frac{2012}{224} \right] = 8$ nên ta sẽ tạo ra 9 tam giác đều và mỗi tam giác đều có cạnh bằng 1 nằm trong tam giác có cạnh bằng 3. Ta thực hiện phép chia như sau

Chia tam giác đã cho thành 9 tam giác đều có cạnh bằng 1. Khi đó có một tam giác chứa ít nhất 224 điểm trong 2012 điểm đã cho. $\square$

Nhận xét: Với cách làm như trên, ta có thể thực hiện đối với tam giác đều có cạnh bằng n hoặc với hình vuông và có thể thay đổi cách hỏi để có bài toán mới. Chẳng hạn ta có bài toán sau: "Trong hình vuông cạnh bằng n cho $6n^2 + 1$ điểm. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 1 chứa ít nhất 7 điểm trong $6n^2 + 1$ điểm đã cho".

Để giải bài toán trên, ta chia hình vuông đã cho thành n^2 hình vuông đơn vị. Vì có $6n^2 + 1$ điểm và n^2 hình vuông nên có ít nhất một hình vuông chứa 7 trong $6n^2 + 1$ điểm đã cho. Đường tròn ngoại tiếp hình vuông đơn vị này có bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ chứa 7 điểm nói trên.

Do đó, yêu cầu bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng cho $2n + 1$ điểm sao cho với 3 điểm bất kì luôn có 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 1 chứa ít nhất $n + 1$ điểm trong $2n + 1$ điểm đã cho.

Lời giải. Vì cần chứng minh đường tròn chứa $n + 1$ điểm trong $2n + 1$ điểm nên ta cần chia $2n + 1$ điểm này thành 2 nhóm.

Xét A là một trong $2n + 1$ điểm. Xét đường tròn $(S) = (A, 1)$.

- Nếu (S) chứa $2n$ điểm còn lại thì ta có điều phải chứng minh.
- Nếu $B \notin (S)$, ta xét đường tròn $(S') = (B, 1)$.

Khi đó với điểm C bất kì khác A và B , ta có:

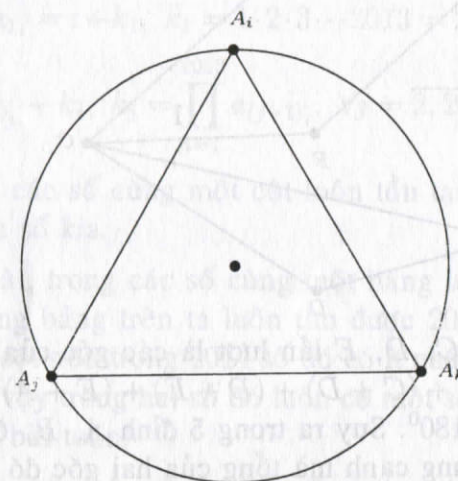
$$\begin{cases} AC < 1 \\ BC < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \in (S) \\ C \in (S') \end{cases}$$

Do đó trong $2n - 1$ điểm còn lại (khác A và B) hoặc thuộc (S) hoặc thuộc (S') nên trong hai đường tròn đó chứa ít nhất n điểm.

Hay đường tròn đó chứa ít nhất $n + 1$ điểm trong $2n + 1$ điểm đã cho. $\square$

Ví dụ 3. Cho đa giác đều $A_1A_2 \cdots A_{1981}$ nội tiếp (O) . Chứng minh rằng trong số 64 đỉnh bất kì của đa giác luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

Lời giải. Ta có nhận xét: Nếu có 2 dây (được tạo thành từ 1981 đỉnh của đa giác) có độ dài bằng nhau và không có đỉnh chung thì ta sẽ có một hình thang.



Xét độ dài các dây cung $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_{1981}$ sẽ có $A_1A_2 = A_1A_{1981}, A_1A_3 = A_1A_{1980}, \dots, A_1A_{991} = A_1A_{992}$ và các độ dài này đôi một khác nhau. Vậy có 990 độ dài các dây cung có một đỉnh là A_1 và đó cũng là tất cả các độ dài của các dây cung.

Trong 64 đỉnh sẽ có $C_{64}^2 = 2016$ dây cung suy ra có ít nhất 3 dây cung có cùng độ dài.

Nếu các dây cung này đều đôi một có đỉnh chung thì sẽ tạo thành một tam giác đều (vì chỉ có đúng 2 dây cung chung đỉnh có cùng độ dài) như hình vẽ:

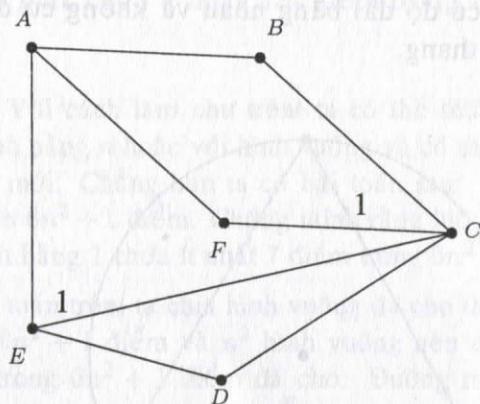
Khi đó đường tròn sẽ được chia ra thành 3 cung bằng nhau suy ra số đỉnh của đa giác phải là số nguyên lần của 3, điều này là vô lí vì 1981 không chia hết cho 3.

Vậy trong 3 dây cung có cùng độ dài này có ít nhất hai dây cung không có chung đỉnh. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 4. Cho đa giác lồi 2013 cạnh có các đỉnh đều có tọa độ

nguyên. Chứng minh rằng trong đa giác có ít nhất 402 điểm có tọa độ nguyên.

Lời giải. Xét 5 đỉnh liên tiếp của đa giác A, B, C, D, E tạo thành một ngũ giác (như hình vẽ).



Kí hiệu A, B, C, D, E lần lượt là các góc của ngũ giác. Vì $(A + B) + (B + C) + (C + D) + (D + E) + (E + A) = 2(A + B + C + D + E) = 6 \cdot 180^\circ$. Suy ra trong 5 đỉnh A, B, C, D, E luôn tồn tại hai đỉnh chung cạnh mà tổng của hai góc đó lớn hơn 180° . Giả sử hai góc đó là $A + B > 180^\circ$.

Mặt khác:

$$A + B + C_1 + E_1 = 360^\circ \Rightarrow \begin{cases} A + E_1 > 180^\circ \\ B + C_1 > 180^\circ \end{cases}$$

Giả sử $B + C_1 > 180^\circ$. Dựng hình bình hành $ABCF$, suy ra F nằm trong tứ giác $ABCE$.

Vì $ABCF$ là hình bình hành và A, B, C có tọa độ nguyên nên dẫn tới F cũng có tọa độ nguyên.

Áp dụng tương tự cho các bộ 5 điểm liên tiếp rời nhau còn lại, ta có thêm $\left\lfloor \frac{2013}{5} \right\rfloor = 402$ điểm nguyên nữa. Từ đó ta có kết luận bài toán. $\square$

Ví dụ 5. Cho A là một tập con của tập các số tự nhiên dương. Biết rằng trong 2013 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn tồn tại một số thuộc A . Chứng minh rằng trong A luôn tồn tại hai số sao cho số này chia hết cho số kia.

Lời giải. Xét bảng sau

1	2	3	4	5	...	...	2013
a_{1_1}	a_{1_2}	a_{1_3}	a_{1_4}	a_{1_5}	...	...	$a_{1_{2013}}$
a_{2_1}	a_{2_2}	a_{2_3}	a_{2_4}	a_{2_5}	...	...	$a_{2_{2013}}$
...	...	...	...	...	...	...	...
a_{2014_1}	a_{2014_2}	a_{2014_3}	a_{2014_4}	a_{2014_5}	...	...	$a_{2014_{2013}}$

Trong đó $a_{1_i} = i + k_1$, $k_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2013 = 2013!$, $\forall i = \overline{1, 2013}$.

$$a_{j_i} = a_{(j-1)_i} + k_j, \quad k_j = \prod_{i=1}^{2013} a_{(j-1)_i}, \quad \forall j = \overline{2, 2014}, \quad i = \overline{1, 2013}$$

Ta thấy trong các số cùng một cột luôn tồn tại hai số sao cho số này là bội của số kia.

Theo đề bài, trong các số cùng một hàng luôn có ít nhất 1 số thuộc A . Trong bảng trên ta luôn tìm được 2014 số thuộc A , mà bảng có 2013 cột nên trong 2014 số đó có ít nhất hai số thuộc cùng một cột. Như vậy trong hai số đó luôn có một số là bội của số kia, ta có kết luận bài toán. $\square$

Ví dụ 6. Trong bảng 4×7 (4 hàng, 7 cột) người ta tô các ô vuông bởi hai màu: Đen và trắng, mỗi ô một màu. Chứng minh rằng với bất kì cách tô nào ta luôn tìm được một hình chữ nhật có các cạnh nằm trên các đường lưới mà 4 đỉnh ở 4 ô cùng màu.

Lời giải 1. Ta xét bảng 3×7 (3 hàng, 7 cột). Ta xét các trường hợp sau

- **Trường hợp 1:** Trong bảng tồn tại ít nhất một cột được tô duy nhất một màu. Chẳng hạn toàn bộ cột đó được tô màu đen. Ta xét 6 cột còn lại.
 - Nếu tồn tại ít nhất 1 cột có 2 ô được tô màu đen thì bài toán được giải quyết.
 - Nếu 6 cột còn lại, mỗi cột có ít nhất 2 ô được tô màu trắng. Vì có 4 trạng thái tô màu cho 6 cột còn lại là T-Đ-T, Đ-T-T, T-T-Đ, T-T-T nên theo nguyên lí Dirichle, trong 6 cột đó có ít nhất 2 cột có trạng thái tô màu giống nhau. Chọn 2 cột đó ta có được các tô thỏa yêu cầu bài toán.

- **Trường hợp 2:** Không có cột nào được tô 1 màu, nên có 6 trạng thái tô màu cho 7 cột là T-Đ-T, Đ-T-T, T-T-Đ, Đ-Đ-T, Đ-T-Đ, T-Đ-Đ. Suy ra sẽ có 2 cột có cùng trạng thái tô màu. Chọn hai hàng đó ta có được cách tô thỏa yêu cầu bài toán.

Chứng minh hoàn tất. $\square$

Lời giải 2. Vì bảng đã cho có 28 ô và được tô bởi 2 màu nên có ít nhất 14 ô được tô cùng màu. Gọi a_i là số ô được tô màu đen trên cột i ($1 \leq i \leq 7$).

Ta có: $\sum_{i=1}^7 a_i \geq 14$, và ta có thể giảm số ô đen xuống để $\sum_{i=1}^7 a_i = 14$.

Trên cột thứ i có $\frac{a_i(a_i-1)}{2}$ cặp ô cùng màu đen Ta chiếu bằng xuống một đường thẳng d song song với cột của bảng. Mỗi ô của bảng biến thành một đoạn thẳng nằm trên d và số đoạn thẳng trên d là: $C_4^2 = 6$ đoạn. Mặt khác, số cặp điểm đen trên cột là:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^7 \frac{a_i(a_i-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 (a_i^2 - a_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 \left(\frac{1}{7} \left(\sum_{i=1}^7 a_i \right)^2 - a_i \right) = 7 > 6. \end{aligned}$$

Vì số cặp chiếu xuống nhiều hơn số đoạn thẳng nên sẽ có hai cặp mà hình chiếu của chúng trùng nhau. Bốn ô ở hai cặp đó tạo thành một hình chữ nhật thỏa yêu cầu bài toán. $\square$

Ví dụ 7. Trên bàn cờ 10×10 người ta viết các số từ 1 đến 100. Mỗi hàng chọn ra số lớn thứ ba. Chứng minh rằng tồn tại một hàng có tổng các số trong hàng đó nhỏ hơn tổng các chữ số lớn thứ ba được chọn.

Lời giải. Kí hiệu các số lớn thứ ba là $a_9 < a_8 < \dots < a_0$. Khi đó số phần tử lớn hơn a_0 nhiều nhất là 20 (nhiều nhất là 2 phần tử ở mỗi hàng). Suy ra $a_0 \geq 80$. Tương tự $a_1 \geq 78$. Mặt khác

$$a_8 \geq a_9 + 1, a_7 \geq a_9 + 1, \dots, a_2 \geq a_9 + 7.$$

Kết hợp với các điều trên lại với nhau, ta được

$$a_0 + a_1 + \dots + a_9 \geq 80 + 78 + (a_9 + 1) + \dots + (a_9 + 7) = 8a_9 + 180.$$

Xét hàng chứa a_9 . Tổng các số của dòng chứa a_9 là

$$\begin{aligned} S(a_9) &\leq 100 + 99 + a_9 + a_9 - 1 + \dots + a_9 - 7 \\ &= 8a_9 + 171 \\ &< 8a_9 + 180 \\ &\leq a_0 + a_1 + \dots + a_9. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 8. Cho tập $S = \{1, 2, \dots, 999\}$ và A là một tập con bất kì của S mà $|A| = 835$. Chứng minh rằng luôn tồn tại 4 phần tử a, b, c, d thuộc A sao cho $a + 2b + 3c = d$.

Lời giải. Đặt $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{835}\}$ với $a_1 < a_2 < \dots < a_{835}$. Xét hiệu

$$d = a_{835} - 3a_1 = 3(a_{835} - a_1) - 2a_{835} \geq 3 \cdot 834 - 2 \cdot 999 = 504.$$

Do đó 166 cặp số sau là phân biệt $(d-2; 1), (d-4; 2), \dots, (d-2 \cdot 165; 165), (d-2 \cdot 166; 166)$. Vì có 164 phần tử S không thuộc tập A , nên trong các cặp trên tồn tại ít nhất một cặp $(x; y)$ với $y \neq a_1$ mà $x, y \in A$. Giả sử cặp đó là $(d-2k; k)$ với $k \in \{1, 2, \dots, 166\}$.

Khi đó ta có ngay: $x + 2y + 3a_1 = a_{835}$, suy ra điều phải chứng minh. Gọi c, d lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của tập S . Để thấy $d - c \geq 834, c \leq 165$. Ta có

$$k = d - 3c = (d - c) - 2c \geq 834 - 2 \cdot 165 > 3 \cdot 166.$$

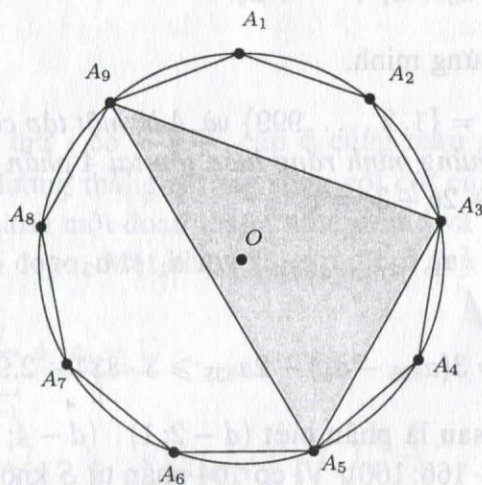
Xét các cặp số $(k-2i; i)$ với $i = 1, 2, \dots, 166$ và $i \neq c$ thì do $k > 3 \cdot 166$ nên ta thấy có tất cả $166 - 1 = 165$ cặp (do loại một cặp chứa c) như thế với 330 số đôi một khác nhau và khác c .

Do tập hợp A có 835 phần tử nên có đúng 164 phần tử của S mà không thuộc tập A . Suy ra với 165 cặp đã cho thì dễ thấy có ít nhất một cặp mà cả hai số đều thuộc A , giả sử là $(k - 2b, b)$.

Đặt $k - 2b = a$ thì dễ thấy bộ số (a, b, c, d) thỏa mãn đẳng thức $a + 2b + 3c = d$ nên trong tập hợp có 835 phần tử, ta luôn tìm được bộ số thỏa mãn đề bài. $\square$

Ví dụ 9. Mỗi đỉnh của một cửu giác đều (đa giác đều 9 cạnh) được tô một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại hai tam giác có đỉnh là đỉnh của cửu giác, đồng dạng với nhau và các đỉnh được tô cùng một màu.

Lời giải. Chúng ta gọi một tam giác đỏ (xanh) nếu tất cả các đỉnh của tam giác được tô màu đỏ (xanh).



Vì 9 đỉnh của cửu giác được tô bởi hai màu nên theo nguyên lý Dirichle, có ít nhất 5 đỉnh được tô một màu. Ta giả sử 5 đỉnh được tô màu đỏ. Suy ra có ít nhất $C_5^3 = 10$ tam giác đỏ, kí hiệu T là tập gồm 10 tam giác đỏ này.

Ta chứng minh trong 10 tam giác đỏ này, có hai tam giác đồng dạng với nhau.

Đặt cửu giác đó là $A_1A_2 \dots A_9$ và đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp cửu giác. Khi đó cửu giác sẽ chia đường tròn (O) thành 9 cung nhỏ bằng nhau. Ta gọi mỗi cung nhỏ là một "lá".

Xét tam giác $A_iA_jA_k$ với $A_iA_j \leq A_jA_k \leq A_kA_i$. Gọi a_{ij} là số "lá" nằm trên cung $\widehat{A_iA_j}$ không chứa A_k ; a_{jk}, a_{ki} được định nghĩa tương tự. Ta thấy mỗi tam giác $A_iA_jA_k$ tương ứng với một bộ (a_{ij}, a_{jk}, a_{ki}) thỏa $1 \leq a_{ij} \leq a_{jk} \leq a_{ki} \leq 7$ và $a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 9$. Ví dụ tam giác $A_3A_5A_9$ tương ứng với bộ $(2; 3; 4)$.

Chia T thành các tập con T_i mà mỗi tập con T_i chứa các tam giác đồng dạng thuộc T . Như vậy mỗi T_i tương ứng với một bộ nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} a + b + c = 9 \\ 1 \leq a \leq b \leq c \leq 7 \end{cases} \quad (*) \text{ và ngược lại.}$$

Phương trình $(*)$ có 7 bộ nghiệm: $(1; 1; 7), (1; 2; 6), (1; 3; 5), (1; 4; 4), (2; 2; 5), (2; 3; 4), (3; 3; 3)$. Do đó ta có 7 tập T_i , mà trong T có 10 tam giác nên theo nguyên lý Dirichle, trong các tập T_i có ít nhất một tập chứa ít nhất hai tam giác.

Bài toán được giải quyết. $\square$

2. Phương pháp xây dựng

Trong một số trường hợp để chứng minh bài toán tồn tại, ta xây dựng một cấu hình tổ hợp nào đó và cấu hình đó thỏa yêu cầu bài toán. Một số trường hợp, cấu hình tổ hợp được xây dựng dựa vào phương pháp quy nạp.

Ví dụ 10. Chứng minh rằng tập các số nguyên dương có thể chia thành một số vô hạn các tập vô hạn sao cho: Nếu x, y, z, w đều thuộc cùng một tập thì $x - y$ và $z - w$ cũng thuộc tập đó thì $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$.

Lời giải. Ta phân hoạch: $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$. Trong đó

$$A_k = \{(2k-1) \cdot 2^t \mid k \in \mathbb{N}^*, t \in \mathbb{N}\}.$$

Ta có A_k là tập vô hạn với mọi $k = 1, 2, \dots$. Xét $x, y, z, w \in A_k$. Suy ra

$$x = (2k-1)2^{x_t}, y = (2k-1)2^{y_t}, z = (2k-1)2^{z_t}, w = (2k-1)2^{w_t}.$$

Do đó

$$\frac{x}{y} = 2^{x_t - y_t},$$

$$\frac{z}{w} = 2^{z_t - w_t},$$

$$x - y = (2k - 1)2^{y_t} (2^{x_t - y_t} - 1),$$

$$z - w = (2k - 1)2^{w_t} (2^{z_t - w_t} - 1).$$

Suy ra

$$\begin{cases} x - y \in A_k \\ z - w \in A_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_t - y_t = 1 \\ z_t - w_t = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{w}.$$

Chứng minh hoàn tất. $\square$

Ví dụ 11. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và số nguyên h thỏa $\left[\frac{n}{2}\right] \leq h \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Chứng minh rằng tồn tại n điểm phân biệt trong mặt phẳng sao cho tìm được đúng h khoảng cách phân biệt trong chúng.

Lời giải. Ta xét các trường hợp sau

- $\left[\frac{n}{2}\right] \leq h \leq n - 2$, ta xét $2h + 1$ đa giác đều. Do $2h + 1 > n$, nên ta chọn n điểm liên tiếp của đa giác đều. Vì $n \geq h - 2$, nên trong n điểm này có đúng h khoảng cách phân biệt.

- $n - 1 \leq h \leq \frac{n(n-1)}{2}$, khi đó, tồn tại duy nhất số nguyên m sao cho

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} \leq h \leq \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(m-2)(m-1)}{2}.$$

Ta lấy n điểm thuộc một đường thẳng như sau. Chọn m điểm đầu tiên là $1, 2, 3, \dots, m$. Điểm tiếp theo là $m + p$, với

$$p = h - (m - 1) + \frac{m(m+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ta có

$$1 \leq p = h - \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} + m \leq m.$$

Ta có khoảng cách giữa $m + 1$ điểm đầu là

$$\{1, 2, 3, \dots, m + p - 1\}.$$

Bây giờ, $n - m - 1$ điểm còn lại ta chọn sao cho không có khoảng cách bất kì nào được tính 2 lần. Suy ra số khoảng cách là:

$$\begin{aligned} p + m - 1 + \sum_{i=m+2}^n (i - 1) &= p + m - 1 + \sum_{i=m+1}^{n-1} i \\ &= p + m - 1 + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = h. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. $\square$

Ví dụ 12. Trên bảng kích thước $2^n \times n$ (2^n hàng và n cột) ta điền mỗi số một số 1 hoặc -1 sao cho không có hai hàng nào giống nhau. Sau đó ta thay một vài số ở một vài ô bởi số 0. Chứng minh rằng ta có thể chọn được một số hàng sao cho tổng các số trên mỗi cột tính trên các ô thuộc các hàng được chọn đều bằng 0.

Lời giải. Ta đánh số các hàng là $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$. Kí hiệu $f(a_i)$ là hàng a_i sau khi thay đổi và $g(x)$ là hàng duy nhất của x thỏa mãn

$$\begin{cases} -1 & \text{tại các vị trí mà } x = 1. \\ 1 & \text{tại các vị trí mà } x \in \{-1, 0\}. \end{cases}$$

Ta xây dựng dãy

$$b_1 = f(a_1)$$

$$b_2 = b_1 + f(g(b_1))$$

...

$$b_{2^n} = b_{2^n-1} + f(g(b_{2^n-1}))$$

Ta có: $a_1 = (1, 1, \dots, 1)$. Suy ra

$$b_1 = f(a_1) = (1, 1, \dots, 0, \dots) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2^n}); \alpha_i \in \{0, 1\}$$

$$g(b_1) = (\beta_1, \dots, \beta_{2^n}) \text{ với } \beta_i = \begin{cases} 1 & \text{khi } \alpha_i = 0. \\ -1 & \text{khi } \alpha_i = 1. \end{cases}$$

Suy ra $f(g(b_1)) + b_1 \in \{0, 1\} \Rightarrow b_2 \in \{0, 1\}$. Từ đó, bằng quy nạp ta suy ra được

$$b_1, b_2, \dots, b_{2^n} \in \{0, 1\}.$$

Ta xét các trường hợp sau

- Nếu tồn tại i để $b_i = (0, 0, \dots, 0)$. (*)

Ta chọn i nhỏ nhất thỏa (*)

- Nếu $i = 1 \Rightarrow f(a_1) = (0, 0, \dots, 0)$ ta chọn hàng 1.
- Nếu $i \geq 2$, suy ra

$$\begin{aligned} b_i &= b_{i-1} + f(g(b_{i-1})) \\ &= \dots \\ &= f(g(b_{i-1})) + f(g(b_{i-2})) + \dots + f(a_1). \end{aligned}$$

Ta chọn hàng 1, $g(b_1), \dots, g(b_{i-1})$ thỏa yêu cầu bài toán.

- Nếu tồn tại $i \neq j$ mà $b_i = b_j$ (**) ta chọn $i, j : |i - j|$ nhỏ nhất thỏa (**)

$$b_j = b_{j-1} + f(g(b_{j-1})) = b_i + f(g(b_i)) + \dots + f(g(b_{j-1})).$$

Suy ra $f(g(b_i)) + \dots + f(g(b_{j-1})) = 0, b_i \rightarrow b_{j-1}$ là phân biệt.
Suy ra $g(b_i), \dots, g(b_{j-1})$ phân biệt.

Ta chọn hàng $g(b_i), \dots, g(b_{j-1})$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán được chứng minh. $\square$

Ví dụ 13. Trong kỳ thi chọn đội tuyển học sinh giỏi toán của một tỉnh có 20 em tham gia. Mỗi học sinh phải thi 2 vòng, mỗi vòng được gọi là một bài thi. Điểm của mỗi bài thi được cho là một số tự nhiên từ 1 đến 10. Phương thức chọn đội tuyển là so sánh kết quả điểm của từng bài thi tương ứng (vòng 1, vòng 2) giữa các thí sinh. Thí sinh A gọi là so sánh được với thí sinh B nếu điểm mỗi bài thi của A không nhỏ hơn điểm mỗi bài thi tương ứng của thí sinh B. Biết rằng không có hai thí sinh nào có cùng cặp điểm số tương ứng. Chứng minh rằng có thể chọn được ba thí sinh A, B, C sao cho A so sánh được với B và B so sánh được với C.

Lời giải. Đặt $X_i = (a_i, b_i)$ đại diện cho điểm thi của học sinh thứ i với điều kiện $i = 1, 2, 3, \dots, 20$ và $1 \leq a_i, b_i \leq 10$.

Do không có hai thí sinh nào có cùng cặp điểm số nên $X_i \neq X_j$ với mọi $i \neq j$. Ta quy ước gọi $X_i > X_j$ nếu $a_i \geq a_j, b_i \geq b_j$.

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại 3 số m, n, p mà $A_m < A_n < A_p$. Thật vậy, do chỉ có 10 giá trị dành cho 20 số a_i nên có thể có 2 trường hợp sau xảy ra

- Nếu tồn tại ba số a_i, a_j, a_k mà $a_i = a_j = a_k$ thì rõ ràng các số b_i, b_j, b_k đôi một khác nhau và các thí sinh có điểm số tương ứng như thế sẽ so sánh được. Trong trường hợp này, bài toán đúng.
- Nếu không tồn tại ba số như thế thì rõ ràng các số này sẽ được chia thành 10 cặp, mỗi cặp là hai số bằng nhau và lấy đúng 1 giá trị không vượt quá 10. Không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_4 = 2, \dots, a_{19} = a_{20} = 10,$$

và $b_{2i-1} < b_{2i}$ với $i = 1, 2, 3, \dots, 10$.

Lập luận tương tự, ta cũng thấy rằng các số $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}$ cũng được chia thành 10 cặp và mỗi cặp nhận một trong các giá trị 1, 2, 3, $\dots$, 10. Ta lại có hai trường hợp:

- Nếu tồn tại i, j mà $b_{2i-1} \leq b_{2j-1}$ với $i < j$ thì khi đó dễ thấy

$$a_{2i-1} = a_{2i} = i < j = a_{2j-1} = a_{2j},$$

và $b_{2j-1} \leq b_{2j-1} < b_{2j}$ nên các cặp $A_{2i-1} < A_{2j-1} < A_{2j}$ và chúng so sánh được.

- Nếu không tồn tại i, j như thế thì $b_{2i-1} > b_{2j-1}$ với mọi $1 \leq i < j \leq 10$. Do đó, ta suy ra được rằng $b_{19} = 1, b_{17} = 2, b_{15} = 3, \dots, b_1 = 10$.

Như thế ta đã có $A_1 = (1, 10), A_3 = (2, 9), A_5 = (3, 8), \dots, A_{19} = (10, 1)$ và các cặp này đôi một không thể so sánh được với nhau.

Ngoài ra, còn 10 cặp nữa là $A_2 = (1, b_2), A_4 = (2, b_4), A_6 = (3, b_6), \dots, A_{20} = (10, b_{10})$ với $b_2, b_4, b_6, \dots, b_{20}$ là một hoán vị của 10, 9, 8, $\dots$, 1 mà không có điểm bất động, tức là với mọi $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ thì $b_{2i} \neq 11 - i$ (do các điểm của thí sinh A_{2i-1} và A_{2i} khác nhau).

Ta giả sử $b_{2i} = 10, i > 1$ thì $b_2 = k < 10$ thì khi đó $A_2 = (1, k) < A_1 = (1, 10) < A_{2i} = (i, 10)$ là bộ ba so sánh được. Do đó, trong mọi trường hợp, ta luôn có điều phải chứng minh.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. □

Ví dụ 14. Cho hai tập hợp A, B là tập hợp các số nguyên dương thỏa mãn $|A| = |B| = n$ (với n là số nguyên dương) và có tổng các phần tử bằng nhau. Xét bảng ô vuông $n \times n$. Chứng minh rằng ta có thể điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên không âm thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

- (i) Tập hợp tổng các số ở mỗi hàng là tập A .
- (ii) Tập hợp tổng các số ở mỗi cột là tập B .
- (iii) Có ít nhất $(n - 1)^2 + k$ số 0 trong bảng với k là số các phần tử chung của A và B .

Lời giải. Trước hết, ta thấy rằng nếu một giá trị k sao cho tồn tại 2 phần tử bằng nhau ở mỗi tập là $a_k = b_k = t$ thì ta điền số t vào ô vuông nằm ở hàng thứ k và cột thứ k , các ô còn lại của hàng thứ k và cột thứ k đều điền vào số 0. Như thế thì tổng các số ở hàng và cột này thỏa mãn đề bài và không ảnh hưởng đến các hàng và cột khác. Do đó, không mất tính tổng quát, ta xét trường hợp $A \cap B = \emptyset$ (trường hợp có các phần tử chung thì điền thêm vào các hàng và cột theo cách tương tự như trên), tức là số phần tử chung của hai tập là $k = 0$.

	1	2		i				n
1				0				
1				0				
				0				
i	0	0		X	0	0	0	
				0				
				0				
n				0				

		1	2					$n - 1$
X	1							
1								
2								
i	X							
$n - 1$								

Ta sẽ chứng minh bài toán này bằng quy nạp.

Gọi T là tập hợp các điều kiện (i), (ii), (iii) như trên (điều kiện (iii) tương ứng với trường hợp xét số nguyên dương n).

Với $n = 1$, bài toán hiển nhiên đúng.

Giả sử bài toán đúng với mọi số tập hợp có $n - 1$ phần tử. Ta sẽ chứng minh rằng với hai tập A, B có n phần tử, ta cũng có thể xây dựng một bảng $n \times n$ thỏa mãn điều kiện T .

Thật vậy, ta xét hai tập

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\},$$

trong đó $a_1 < a_2 < \dots < a_n, b_1 < b_2 < \dots < b_n$ và hai tập này không có phần tử chung.

Giả sử $a_1 < b_i$. Vì tổng các phần tử bằng nhau nên tồn tại chỉ số i sao cho

$$a_i > b_1 > b_1 - a_1 \Rightarrow a_i - (b_1 - a_1) > 0.$$

Xét tập A', B' như sau

$$A' = \{a_2, a_3, \dots, a_{i-1}, a_i - b_1 + a_1, \dots, a_n\}, B' = \{b_2, \dots, b_n\}.$$

Hai tập hợp này có cùng số phần tử là $n - 1$ nên theo giả thiết quy nạp, tồn tại một bảng có kích thước $(n - 1) \times (n - 1)$ thỏa mãn điều kiện T (trong bảng này có ít nhất $(n - 2)^2$ số 0).

Ta thêm vào bên trái bảng một cột và bên trên bảng một hàng nữa như hình vẽ. Ở ô góc bên trái và phía trên, ta điền số a_1 , ở hàng thứ i của bảng ban đầu (hàng có tổng các phần tử bằng $a_i - b_1 + a_1$), ta điền số $b_1 - a_1$, còn tất cả các ô còn lại của hàng và cột vừa thêm vào, ta điền vào các số 0.

Khi đó, bảng này có tổng các phần tử ở mỗi hàng là tập A và tổng các phần tử ở mỗi cột là tập B , số các số 0 ở bảng vừa lập được không nhỏ hơn $(n - 2)^2 + 2(n - 1) - 1 = (n - 1)^2$ và do đó nó thỏa mãn điều kiện T .

Do đó, bài toán cũng đúng với mọi tập hợp có n phần tử.

Theo nguyên lí quy nạp, bài toán này đúng với mọi số nguyên dương n .

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

3. Sử dụng công thức nguyên lí bù trừ

Công thức nguyên lí bù trừ: Với n tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ khi đó, ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n |A_k| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Để chứng minh tồn tại một phần tử thuộc đồng thời tất cả các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$, ta sẽ chứng minh $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| > 0$.

Ví dụ 15. Bảy đa giác đều có diện tích bằng 1 nằm trong một hình vuông có độ dài cạnh bằng 2. Chứng minh rằng có ít nhất hai đa giác cắt nhau có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{7}$.

Lời giải. Kí hiệu $H_1, H_2, \dots, H_7$ là 7 đa giác đều có diện tích bằng 1 nằm trong hình vuông H có cạnh bằng 2 và $S(A)$ là diện tích của hình A .

Giả sử yêu cầu bài toán không thỏa mãn. Suy ra $S(H_i \cap H_j) < \frac{1}{7}$ với mọi $1 \leq i < j \leq 7$. Khi đó

$$S(H_1 \cup H_2) = S(H_1) + S(H_2) - S(H_1 \cap H_2) > 1 + 1 - \frac{1}{7} = 2 - \frac{1}{7}.$$

$$\begin{aligned} S(H_1 \cup H_2 \cup H_3) &= S(H_1 \cup H_2) + S(H_3) - S((H_1 \cup H_2) \cap H_3) \\ &= S(H_1 \cup H_2) + S(H_3) - S((H_1 \cap H_3) \cup (H_2 \cap H_3)) \\ &= S(H_1 \cup H_2) + S(H_3) - S(H_1 \cap H_3) - S(H_2 \cap H_3) \\ &\quad + S(H_1 \cap H_2 \cap H_3) \\ &> 2 - \frac{1}{7} + 1 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) = 3 - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7}\right). \end{aligned}$$

Tương tự, ta suy ra

$$S\left(\bigcup_{i=1}^7 H_i\right) > 7 - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \dots + \frac{6}{7}\right) = 4.$$

Tuy nhiên

$$H_i \subset H \Rightarrow \bigcup_{i=1}^7 H_i \subset H \Rightarrow S\left(\bigcup_{i=1}^7 H_i\right) \leq S(H) = 4.$$

Từ đó suy ra mâu thuẫn. Vậy bài toán được chứng minh. $\square$

Ví dụ 16. Khi điều tra một lớp học, người ta thấy

Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Toán cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Vật Lý.

Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Vật Lý cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Văn.

Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Văn cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Lịch Sử.

Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Lịch Sử cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Toán.

Chứng minh rằng có ít nhất 1 học sinh đạt điểm giỏi cả 4 môn Toán, Vật Lý, Văn và Lịch Sử.

Lời giải. Kí hiệu T, L, V, S lần lượt là tập các học sinh có điểm giỏi ở môn Toán, Lý, Văn, Sử.

$$X = T \cap L, Y = L \cap V, Z = V \cap S.$$

Để chứng minh yêu cầu bài toán, ta chứng minh $X \cap Y \cap Z \neq \emptyset$ hay $|X \cap Y \cap Z| > 0$.

Theo đề bài, ta có

$$|X| > \frac{2}{3}|T|, |Y| > \frac{2}{3}|L|, |Z| > \frac{2}{3}|V|.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|T| \geq |L| \geq |V| \geq |S|$. Theo nguyên lí bù trừ, ta có

$$\begin{aligned} |X \cap Y \cap Z| &= |X \cap Y| + |Z| - |(X \cap Y) \cup Z| \\ &= |X| + |Y| + |Z| - |X \cup Y| - |(X \cap Y) \cup Z|. \end{aligned}$$

Mà

$$X \cup Y = (T \cap L) \cup (L \cap V) \subset L \Rightarrow |X \cup Y| \leq |L|,$$

và

$$(X \cap Y) \cup Z \subset V \Rightarrow |(X \cap Y) \cup Z| \leq |V|.$$

Do đó

$$|X \cap Y \cap Z| > \frac{2}{3}|T| + \frac{2}{3}|L| + \frac{2}{3}|V| - |L| - |V| > 0.$$

Từ đó, ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 17. Cho một hình phẳng (H) có diện tích bằng 1. Bên trong hình phẳng đó có n ($n \in \mathbb{N}^*$) hình phẳng $H_1, H_2, \dots, H_n$ có tổng diện tích lớn hơn $n - 1$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm của hình phẳng (H) nằm trong tất cả các hình phẳng $H_1, H_2, \dots, H_n$.

Lời giải. Kí hiệu $S(A)$ là diện tích của hình phẳng A . Ta có

$$S(H_i) = S(H) - S(H \setminus H_i) = 1 - S(H \setminus H_i).$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^n S(H_i) = n - \sum_{i=1}^n S(H \setminus H_i) > n - 1,$$

suy ra tiếp

$$\sum_{i=1}^n S(H \setminus H_i) < 1.$$

Do đó

$$S\left(\bigcup_{i=1}^n (H \setminus H_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n S(H \setminus H_i) < 1.$$

Mặt khác vì $\bigcup_{i=1}^n (H \setminus H_i) = H \setminus \bigcap_{i=1}^n H_i$, nên từ đó ta có

$$S\left(H \setminus \bigcap_{i=1}^n H_i\right) < 1,$$

tương đương với

$$S(H) - S\left(\bigcap_{i=1}^n H_i\right) < 1,$$

$$S\left(\bigcap_{i=1}^n H_i\right) > 0.$$

Do đó $\bigcap_{i=1}^n H_i \neq \emptyset$ hay tồn tại điểm $X \in \bigcap_{i=1}^n H_i$ và dĩ nhiên là $X \in H$ vì $H_i \subset H$.

Chứng minh hoàn tất. $\square$

4. Phương pháp phản chứng

Phương pháp phản chứng được sử dụng thường xuyên trong các bài toán chứng minh. Trong các bài toán tồn tại, phương pháp phản chứng kết hợp với các nguyên lý Dirichle, các phương pháp xây dựng ... rất có hiệu quả. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 18. Giả sử từ tập hợp $X = \{1, 2, 3, \dots, 2013\}$ ta chọn ra 673 số. Chứng minh rằng trong các số đã chọn có hai số a, b mà $671 < |a - b| < 1342$.

Lời giải. Giả sử rằng trong 673 số chọn ra không có hai số nào thỏa yêu cầu bài toán.

Tức là, với hai số a, b bất kì trong 673 số chọn ra ta luôn có $|a - b| \leq 671$ hoặc $|a - b| \geq 1342$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a > b$, khi đó nếu

- $0 < a - b \leq 671 \Rightarrow 0 < a - b < 672$ và $a > 672$. Đặt $a' = a - 672$, thì $-672 < a' - b < 0$, suy ra $0 < b - a' < 672$.
- $1342 \leq a - b \leq 2012$, suy ra $a - b > 1341$, đặt $a' = a - 1341$ ta có: $0 < a' - b < 671$

Tóm lại với mỗi số $x > 672$ ta luôn chọn được một số $x' \in [1; 672]$ mà x' thỏa điều kiện giả sử. Hay nói cách khác là ta có thể đưa 673 số đã chọn về trong đoạn $[1; 672]$ và các số mới này đôi một khác nhau.

Nhưng trong đoạn $[1; 672]$ có tối đa 672 số nguyên, điều này trái với giả thiết là 673 số lấy ra phân biệt. $\square$

Ví dụ 19. Xét số nguyên dương $n > 1$. Người ta muốn tô tất cả các số tự nhiên bởi hai màu xanh, đỏ sao cho các điều kiện sau đồng thời thỏa mãn

- Mỗi số được tô một màu, mỗi màu được tô vô số số.
- Tổng của n số đôi một khác nhau cùng màu là một số cùng màu.

Hỏi có thể thực hiện được phép tô màu nói trên hay không, nếu:

(a) $n = 2012$.

(b) $n = 2013$.

Lời giải (a). Giả sử tồn tại cách tô màu thoả yêu cầu bài toán.

Vì mỗi màu tô vô hạn số nên tồn tại số a_1 sao cho a_1 tô màu xanh và $a_1 + 1 = b_1$ tô màu đỏ.

Tương tự, tồn tại số b_2 sao cho b_2 tô màu đỏ và $b_2 + 1 = a_2$ tô màu xanh, ..., tồn tại số a_{2012} sao cho a_{2012} tô màu xanh và $a_{2012} + 1 = b_{2012}$ tô màu đỏ.

Từ cách xây dựng, ta có $n_1 = \sum_{i=1}^{2012} a_i$ được tô màu xanh, $n_2 = \sum_{i=1}^{2012} b_i$ được tô màu đỏ.

Tuy nhiên, ta thấy $\sum_{i=1}^{2012} a_i = \sum_{i=1}^{2012} b_i$. Từ đó, suy ra $n_1 = n_2$ (điều này vô lí).

(b) Ta xét cách tô sau

Tô các số chẵn màu xanh và các số lẻ màu đỏ.

Khi đó tổng của 2013 số cùng màu, chẳng hạn cùng màu xanh sẽ là số chẵn nên tổng đó cũng được tô màu xanh. Do đó, cách tô này thoả yêu cầu bài toán. $\square$

Ví dụ 20. Cho $n \geq 3$ là một số nguyên dương. Xét bảng $n \times n$, ta điền vào bảng n^2 số nguyên dương có tổng là n^3 . Chứng minh rằng luôn có thể tìm được một bảng 2×2 gồm 4 phần tử có các cạnh song song với đường chia của bảng sao cho tổng của 4 phần tử trong bảng lớn hơn $3n$.

Lời giải. Giả sử ta không tìm ra được bảng con 2×2 nào thoả mãn cả. Ta xét 2 trường hợp

- **Trường hợp 1:** $n = 2k$, khi đó ta chia bảng thành k^2 bảng con, và tổng các số trong mỗi bảng như thế này không vượt quá $3n$. Khi đó tổng các số trong bảng lớn nhỏ hơn hoặc bằng $3n \cdot \frac{n^2}{4} < n^3$ (mâu thuẫn với giả thiết).
- **Trường hợp 2:** $n = 2k + 1$, ta chia bảng thành k^2 bảng con 2×2 trong bảng $2k \times 2k$, $2k$ bảng 2×1 trong hàng thứ n và cột thứ n , và cuối cùng là ô $(n; n)$.

- Trong k^2 bảng con đó, tổng các số trong mỗi bảng không vượt quá $3n = 3(2k + 1)$.
- Trong $2k$ bảng 2×1 , tổng các số trong mỗi bảng không vượt quá $3n - 2 = 6k + 1$.
- Trong ô $(n; n)$ số được điền phải nhỏ hơn hoặc bằng $3n - 3 = 6k$. Như vậy tổng các ô trong bảng lớn nhất có thể là:

$$3(2k+1)k^2 + (6k+1)2k + 6k = 6k^3 + 12k^2 < (2k+1)^3 = n^3.$$

Điều này trái với giả thiết.

Do đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 21. Trong tập 2006 phần tử ta chọn ra 2005 tập con, mỗi tập có 3 phần tử. Chứng minh rằng có thể tìm được 2 tập con mà chúng có chung đúng 1 phần tử.

Lời giải. Giả sử không tồn tại tính chất như đề bài đã nêu, tức là 2 tập con bất kì trong 2005 tập con đó đều rời nhau hoặc giao nhau tại đúng 2 phần tử.

Khi đó ta chứng minh rằng: Có thể phân các tập thành các nhóm với 3 loại nhóm.

Các tập đôi một rời nhau ta phân làm một nhóm - nhóm I.

Với một tập con A bất kì gồm 3 phần tử $\{a, b, c\}$ thuộc 2005 tập nói trên: Nếu nó không giao với bất kì tập nào khác thì nó thuộc nhóm I.

Nếu nó giao với tập B tại 2 phần tử (giả sử là a, b) thì dễ dàng có những nhận xét sau:

- Nếu có một tập C giao với A cũng tại 2 phần tử a, b thì mọi tập con khác, nếu giao A thì đều giao tại 2 phần tử a, b . Ta gọi nhóm các tập này là - nhóm II.
- Nếu có một tập C giao với A tại 2 phần tử, chẳng hạn như a, c thì ta chỉ có thể thiết lập được nhiều nhất là một tập nữa giao A (do các tập chỉ có thể rời nhau hoặc giao nhau tại đúng hai phần tử). 4 tập này ta xếp vào một loại nhóm là - nhóm III.

Để dàng nhận thấy là 3 nhóm này rời nhau, tức là một tập đã thuộc nhóm này thì không thể nào thuộc nhóm khác.

Mặt khác, nhận xét thêm rằng số tập có ở nhóm *I* luôn ít hơn số phần tử có trong nhóm đó, số tập có trong nhóm *II* nhiều nhất cũng chỉ bằng số phần tử của các tập có trong nhóm đó, số tập có trong nhóm *III* luôn nhỏ hơn hoặc bằng $k - 2$ với k là tổng số phần tử của các tập có trong nhóm đó (chứng minh dễ dàng bằng cách xét nhóm có 3 hoặc 4 tập có chung 2 phần tử).

Chú ý rằng tổng số phần tử của các tập thuộc nhóm *III* phải chia hết cho 4. Mà 2006 không chia hết cho 4 nên chắc chắn phải có sự hiện diện của 2 loại nhóm còn lại.

Nếu tất cả 2005 tập đã chọn đều thuộc nhóm *II* thì tổng số phần tử là: $2 + 2005 = 2007$, mâu thuẫn giả thiết bài toán chỉ có tối đa 2006 phần tử.

Do đó phải có ít nhất một trong hai nhóm còn lại.

Vậy tổng số phần tử (chú ý là phân biệt) của tất cả các tập có mối liên hệ sau với số các tập: $x \geq y + 2$ (với x là tổng số phần tử, y là số tập).

Có 2006 phần tử, vậy thì tối đa ta cũng chỉ có thể lập được 2004 tập con thỏa mãn điều giả sử. Vậy với 2005 tập con thì luôn tồn tại 2 tập con mà chúng giao nhau ở đúng 1 phần tử. $\square$

Qua các ví dụ trên, hy vọng bạn đọc rút ra được cho mình một số hướng tiếp cận khi gặp bài toán chứng minh tồn tại (không tồn tại).

Cuối cùng chúng tôi xin đưa ra một số bài tập để các bạn luyện tập.

5. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1. Trong hình tròn có diện tích bằng 8 đặt 17 điểm bất kỳ phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất ba điểm tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

Bài tập 2. Trên đường tròn cho 16 điểm tô bởi một trong ba màu: X, Đ, V. Các dây cung nối 2 điểm trong 16 điểm trên được tô bởi hai màu: T, Đ. Chứng minh rằng ta luôn có 3 trong 6 điểm trên tô cùng màu và 3 cạnh của nó cũng được tô cùng màu.

Bài tập 3. Trong hình tròn $(O; 2, 5)$ cho 10 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng có hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 2.

Bài tập 4. Trong mặt phẳng cho 9 đường thẳng ngang song song nằm ngang và 9 đường thẳng ngang song song nằm dọc. Người ta đánh dấu các giao điểm bởi hai màu X, Đ. Chứng minh rằng tồn tại 2 đường thẳng nằm ngang và 2 đường thẳng nằm dọc sao cho 4 giao điểm của chúng cùng màu.

Bài tập 5. Cho hình bình hành ABCD và 25 đường thẳng. Mỗi đường thẳng chia ABCD thành 2 hình thang với tỉ số diện tích là $\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng trong 25 đường thẳng đó có 7 đường thẳng đồng quy.

Bài tập 6. Trong hình chữ nhật kích thước 1×2 lấy $6n^2 + 1$ điểm, n nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính $\frac{1}{n}$ chứa không ít hơn 4 điểm trong số các điểm đã cho.

Bài tập 7. Cho 69 số nguyên dương phân biệt không vượt quá 100. Chứng minh rằng có thể chọn được 4 số a, b, c, d sao cho $a < b < c$ và $a + b + c = d$.

Bài tập 8. Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ luôn có ít nhất một số có tổng các chữ số chia hết cho 11.

Bài tập 9. Trên bàn cờ 10×10 người ta viết các số từ 1 đến 100. Mỗi hàng chọn ra số lớn thứ ba. Chứng minh rằng tồn tại một hàng có tổng các số trong hàng đó nhỏ hơn tổng các chữ số lớn thứ ba được chọn.

Bài tập 10. Xét 2002 số nguyên dương phân biệt sao cho không có số nào có ước số nguyên tố lớn hơn 23. Chứng minh rằng ta có thể tìm được bốn số phân biệt sao cho tích của chúng là lũy thừa bậc bốn của một số tự nhiên.

Bài tập 11. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có độ dài mỗi cạnh và độ dài các đường chéo không vượt quá $\sqrt{3}$. Lấy 2011 điểm phân biệt tùy ý nằm trong ngũ giác đó. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn đơn vị có tâm nằm trên cạnh của ngũ giác đã cho chứa ít nhất 403 điểm trong số các điểm đã lấy.

Bài tập 12. Từ một điểm M cho trước ở trong 1 đa giác lồi hạ các đường vuông góc xuống các cạnh của đa giác. Chứng minh rằng tồn tại 1 cạnh của đa giác mà chân đường vuông góc hạ từ M nằm ở phần trong của nó.

Bài tập 13. Trong một buổi tiệc có 20 nam và 21 nữ. Biết rằng mỗi nữ đều quen ít nhất là một nam. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 cặp nam nữ quen nhau mà số nữ mà anh này quen lớn hơn số nam mà chị này quen.

Bài tập 14. Chứng minh rằng tồn tại một cách tô màu các nút của mạng lưới nguyên bởi hai màu thỏa mãn: Không tồn tại hình chữ nhật có 4 đỉnh cùng màu mà có cạnh song song với hai trục tọa độ và diện tích của nó bằng một lũy thừa của 2.

Bài tập 15. Chứng minh rằng tồn tại một tập hợp A_n thỏa mãn:

- (1) A_n chứa đúng n số tự nhiên phân biệt.
- (2) Với $\forall a \in A_n$ thì tích các phần tử còn lại của A_n là một số tự nhiên chia cho a dư 1.

Bài tập 16. Tại mỗi đỉnh của đa giác đều 100 cạnh ta đánh một số bất kì trong các số tự nhiên từ 1 đến 49. Chứng minh rằng tồn tại 4 đỉnh của đa giác đã cho (kí hiệu là A, B, C, D với các số được đánh tương ứng là a, b, c, d) sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật và $a + b = c + d$.

Bài tập 17. Cho đa giác 9 cạnh đều (H) . Xét ba tam giác với các đỉnh là các đỉnh của đa giác (H) đã cho sao cho không có hai tam giác nào có chung đỉnh. Chứng minh rằng có thể chọn được từ mỗi tam giác 1 cạnh sao cho 3 cạnh này bằng nhau.

Bài tập 18. Trong một hội nghị có n nước tham gia, mỗi nước có k đại diện ($n > k > 1$). Người ta chia $n \cdot k$ người này thành n nhóm,

mỗi nhóm có k người sao cho không có hai người nào cùng nhóm đến từ cùng một nước. Chứng minh rằng có thể chọn ra một nhóm gồm n người sao cho họ thuộc các nhóm khác nhau và đến từ các nước khác nhau.

Tài liệu tham khảo

- [1] Phạm Minh Phương, *Một số chuyên đề toán tổ hợp*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2010.
- [2] Vũ Đình Hoà, *Lý thuyết tổ hợp và đồ thị*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.
- [3] Nguyễn Quý Di (chủ biên), *200 bài toán tổ hợp*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [4] Tạp chí THPT, *Giới thiệu các đề thi học sinh giỏi Quốc gia từ năm 1990-2006*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [5] Các diễn đàn về Toán học:

<http://mathscope.org>

<http://math.net.vn>

<http://mathbox.com>

MỘT CÁCH ĐỔI BIẾN VÀ ỨNG DỤNG TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Nguyễn Văn Quý và học sinh Nguyễn Quân Bá Hồng[†]

Đổi biến là một phương pháp hay, chứa đựng nhiều sự tinh tế trong việc tìm lời giải cho các bài toán về đại số nói chung và các bài toán về bất đẳng thức nói riêng. Bài viết này muốn thảo luận về một số cách đổi biến, đã xuất hiện trong một số lời giải của các bất đẳng thức từ các cuộc thi trước đây, và qua đó, đề xuất một số hướng khai thác và mở rộng để tăng thêm hiệu quả giải toán cho phương pháp này.

1. Giới thiệu về một cách đổi biến

1.1. Giới thiệu chung

Để mở đầu vấn đề sắp thảo luận, xin nêu ra một số *nhận định ban đầu* về phương pháp đổi biến nói chung trong chứng minh bất đẳng thức (2 ưu điểm quan trọng):

- Linh hoạt trong biến đổi.
- Khai thác triệt để được giả thiết nếu biết sử dụng một cách thích hợp.

Về ưu điểm thứ nhất: Cần có kỹ năng biến đổi đại số tốt, biết tận dụng một số hằng đẳng thức. Mục đích của việc biến đổi này là *viết lại* bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng đơn giản, dễ nhìn hơn, có nhiều ý tưởng hơn để giải.

[†]Trường THPT Chuyên Bến Tre.

Công việc này tương đối đơn giản, nhưng lại có tác dụng làm xuất hiện *dấu hiệu* của một số phương pháp, hoặc các kết quả đã biết. Từ đó có thể tiếp cận bài toán một cách chủ động hơn.

Về ưu điểm thứ hai: Giả thiết của bài toán thường là yếu tố cản trở công việc chứng minh của chúng ta. Giả thiết càng phức tạp, việc tiếp cận bài toán càng khó. Nếu giải quyết được vấn đề về giả thiết thì mọi chuyện sẽ trở nên dễ dàng hơn rất nhiều. Đổi biến là một phương pháp hữu hiệu để giải quyết vấn đề này.

Ngoài ra, chúng ta cũng biết được bất đẳng thức sau quá trình biến đổi trên là *đúng*. Bởi vì thực chất, ta chỉ *biến đổi*, tác động lên *hình thức* của bất đẳng thức, không làm ảnh hưởng tới tính *đúng sai* của nó. Như vậy, ta cũng yên tâm hơn, vì sau cách đổi biến này, ta không sợ bất đẳng thức thu được bị *ngược dấu*.

Trong bài viết này, chúng tôi chú trọng ưu điểm thứ hai của phương pháp đổi biến.

1.2. Vấn đề xuất phát

Ví dụ 1. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = a + b + c + 2$. Chứng minh bất đẳng thức

$$abc(a-1)(b-1)(c-1) \leq 8.$$

Có một lời giải ngắn cho bài toán trên là từ giả thiết $abc = a + b + c + 2$, ta có thể đặt

$$a = \frac{y+z}{x}, \quad b = \frac{z+x}{y}, \quad c = \frac{x+y}{z}.$$

Chúng ta có thể dễ dàng kiểm tra điều này bằng cách thay trở ngược chúng lại vào đẳng thức điều kiện ở trên và thấy rằng cách đặt trên là đúng.

Phân tích: Bước xuất phát của lời giải trên thật sự không tự nhiên chút nào. Tại sao lại biết có cách đặt như vậy? Trực giác chăng?

Để trả lời câu hỏi này, ta cụ thể hóa các bước của lời giải trên thành sơ đồ sau

A : (1) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (3), trong đó các bước được xác định như sau:

- (1) Giả thiết (điều kiện ràng buộc a, b, c).
- (2) Thay mỗi số a, b, c lần lượt bởi $f(x, y, z), f(y, z, x), f(z, x, y) \rightarrow 3$.
- (3) Để chứng minh cách đặt ở bước 2 thỏa mãn, thay chúng vào giả thiết ở bước 1 để thu được một đẳng thức.

Sự xuất hiện đẳng thức ở bước 3 chính là câu trả lời của câu hỏi được đặt ra ở trên. Ta thử đảo ngược lại quá trình trên, và được

$A' : (1) -$ Từ đẳng thức của $x, y, z \rightarrow (2) -$ Đặt $f(x, y, z), f(y, z, x), f(z, x, y)$ bởi các số $a, b, c \rightarrow (3) -$ Thu được điều kiện ràng buộc của a, b, c .

Chúng ta sẽ sử dụng ý tưởng của sơ đồ A' trên đây để làm hướng đi chính trong vấn đề sắp được thảo luận.

Cách biến đổi: Để cho tiện, ta gọi cách đổi biến trong bài viết này là cách đổi biến X .

Theo hướng đi đã trình bày ở trên, ta sẽ "tìm" cách đổi biến X bằng cách xuất phát từ một đẳng thức đúng. Xét đẳng thức hiển nhiên sau

$$\frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1.$$

Ta có thể viết nó lại thành (bước 1)

$$\frac{1}{1 + \frac{y+z}{x}} + \frac{1}{1 + \frac{z+x}{y}} + \frac{1}{1 + \frac{x+y}{z}} = 1.$$

Ta có thể đặt (bước 2)

$$a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{z+x}{y}, c = \frac{x+y}{z}.$$

Khi đó, ta được

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1,$$

hay $abc = a + b + c + 2$. Như vậy, ta có được mệnh đề sau

Mệnh đề 1. Nếu các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = a + b + c + 2$, thì tồn tại các số dương m, n, p để

$$a = \frac{n+p}{m}, b = \frac{p+m}{n}, c = \frac{m+n}{p}.$$

Từ mệnh đề trên, nếu ta đổi $(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$, ta được mệnh đề sau

Mệnh đề 2. Nếu các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca+2abc = 1$, thì tồn tại ba số thực dương m, n, p sao cho

$$a = \frac{m}{n+p}, b = \frac{n}{p+m}, c = \frac{p}{m+n}.$$

Chúng ta cùng xét ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 2. Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc = 4$. Chứng minh bất đẳng thức

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

Nhận xét: Ta có thể viết điều kiện của bài toán lại dưới dạng

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} = 1.$$

Điều này gợi cho chúng ta mở rộng các mệnh đề 1, 2 để thu được các kết quả tương tự, có thể sẽ hữu ích.

2. Phát triển và mở rộng

2.1. Mở rộng bước đầu

Xét biểu thức tổng quát hơn của biểu thức ở phần trước, có dạng

$$\frac{1}{k+a} + \frac{1}{k+b} + \frac{1}{k+c} = 1.$$

Sau khi khai triển, ta có thể viết đẳng thức trên lại thành

$$k^3 - 3k^2 + (k^2 - 2k)(a+b+c) + (k-1)(ab+bc+ca) + abc = 0.$$

Cũng hoàn toàn tương tự, suy ra tồn tại x, y, z sao cho

$$\frac{1}{k+a} = \frac{x}{x+y+z}, \frac{1}{k+b} = \frac{y}{x+y+z}, \frac{1}{k+c} = \frac{z}{x+y+z}.$$

Từ đó, ta có được mệnh đề tổng quát sau.

Mệnh đề 3. Nếu các số a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{k+a} + \frac{1}{k+b} + \frac{1}{k+c} = 1.$$

Thì tồn tại các số dương m, n, p sao cho

$$a = \frac{m+n+p}{m} - k, b = \frac{m+n+p}{n} - k, c = \frac{m+n+p}{p} - k.$$

Cho k nhận một số giá trị, ta thu được các hệ quả của mệnh đề tổng quát trên. Hơn nữa, ta có thể thay a, b, c bởi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ để thu được các hệ quả tương ứng.

Mệnh đề 4. Nếu các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc = 4$, thì tồn tại các số m, n, p sao cho

$$a = \frac{-m+n+p}{m}, b = \frac{m-n+p}{n}, c = \frac{m+n-p}{p},$$

trong đó m, n, p là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Mệnh đề 5. Nếu các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc = 4$, thì tồn tại ba số dương m, n, p để

$$a = \frac{2m}{n+p}, b = \frac{2n}{p+m}, c = \frac{2p}{m+n}.$$

Mệnh đề 6. Nếu các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c+1 = 4abc$, thì tồn tại các số dương m, n, p để

$$a = \frac{m}{n+p-m}, b = \frac{n}{p+m-n}, c = \frac{p}{m+n-p}.$$

Mệnh đề 7. Nếu các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c+1 = 4abc$, thì tồn tại ba số dương m, n, p để

$$a = \frac{n+p}{2m}, b = \frac{p+m}{2n}, c = \frac{m+n}{2p}.$$

Sau đây là ứng dụng của các mệnh đề trên. Nhưng trước hết, chúng ta hãy cùng giải ví dụ 2 mà ta đã nêu ra ở đầu bài.

Lời giải 1 cho ví dụ 2. Theo mệnh đề 4, ta thấy tồn tại m, n, p dương sao cho

$$a = \frac{2m}{n+p}, b = \frac{2n}{p+m}, c = \frac{2p}{m+n}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{m}{n+p} + \frac{n}{p+m} + \frac{p}{m+n} \geq \frac{2mn}{(p+m)(p+n)} + \frac{2np}{(m+n)(m+p)} + \frac{2pm}{(n+p)(n+m)}.$$

Biến đổi và thu gọn lại, ta được

$$m(m-n)(m-p) + n(n-p)(n-m) + p(p-m)(p-n) \geq 0.$$

Đây là bất đẳng thức Schur bậc 3 quen thuộc, nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. □

Nhận xét: Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng mệnh đề 3 như sau

Lời giải 2 cho ví dụ 2. Theo mệnh đề 3, ta cần phải chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{m+n-p}{p} + \frac{n+p-m}{m} + \frac{p+m-n}{n} \geq \sum \frac{m+n-p}{p} \cdot \frac{n+p-m}{m}.$$

Tương đương với

$$2[mn(m+n) + np(n+p) + pm(p+m)] \geq m^3 + n^3 + p^3 + 9mnp.$$

Như vậy nếu bất đẳng thức này đúng thì ta có điều phải chứng minh. Nhưng tiếc rằng bất đẳng thức trên không phải đúng với mọi bộ số m, n, p mà nó chỉ đúng khi m, n, p là độ dài ba cạnh của một tam giác (do a, b, c dương). Ta có bài toán phụ sau (bổ đề) □

Ví dụ 3. Cho m, n, p là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh bất đẳng thức

$$2[mn(m+n) + np(n+p) + pm(p+m)] \geq m^3 + n^3 + p^3 + 9mnp.$$

Lời giải. Do m, n, p là độ dài ba cạnh của tam giác nên ta có thể đặt

$$m = a + b, \quad n = b + c, \quad p = c + a,$$

với a, b, c là các số dương. Từ cách đặt này, ta có thể dễ dàng biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh trở thành bất đẳng thức Schur quen thuộc.

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Bài toán được chứng minh. $\square$

Nhận xét: So sánh hai lời giải trên ta thấy lời giải 1 tốt hơn (lời giải 2 cần phải sử dụng bổ đề). Cả hai lời giải đều sử dụng ý tưởng đổi biến để giải, nhưng khác nhau ở điều kiện của các biến mới (lời giải 1: m, n, p là các số dương, lời giải 2: m, n, p là độ dài ba cạnh của một tam giác).

Thay a, b, c trong bài toán trên bởi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$. Ta có bài toán sau

Ví dụ 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + 1 = 4abc$. Chứng minh bất đẳng thức

$$ab + bc + ca \geq a + b + c.$$

Sử dụng các mệnh đề trên, ta có thể giải các bài toán sau

Một số bài toán áp dụng

Bài tập 1: Với a, b, c và x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx + 2xyz = 1$, đồng thời $ab + bc + ca + 2abc = 1$. Hãy chứng minh các bất đẳng thức dưới đây

$$(a) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4(x + y + z).$$

$$(b) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4(x + y + z).$$

$$(c) \quad xyz \leq \frac{1}{8}.$$

$$(d) \quad xy + yz + zx \geq \frac{3}{4}.$$

$$(e) \quad \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{2} \leq \sqrt[3]{3(y+1)(z+1)}.$$

$$(f) \quad \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} \leq 2\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

$$(g) \quad \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} + \sqrt[4]{z} \leq \sqrt[4]{12(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

$$(d) \quad a^2 + b^2 + c^2 + 10abc \geq 2.$$

Bài tập 2: Với giả thiết a, b, c và x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z + 2 = xyz$, $a + b + c + 2 = abc$. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây

$$(a) \quad 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \leq x + y + z + 6.$$

$$(b) \quad xyz(x-1)(y-1)(z-1) \leq 8.$$

$$(c) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4(a + b + c).$$

$$(d) \quad xy + yz + zx \geq 2(x + y + z).$$

$$(d) \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2}\sqrt{xyz}.$$

Bài tập 3: Cho a, b, c là ba số thực dương sao cho $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây

$$(a) \quad a + b + c + abc \geq 4.$$

$$(b) \quad a^2 + b^2 + c^2 + abc + 8 \geq 4(a + b + c).$$

$$(c) \quad a^2 + b^2 + c^2 - 3 \geq 2(\sqrt{2} + 1)(a + b + c - 3).$$

$$(d) \quad a^2 + b^2 + c^2 + 28 \geq 8(a + b + c) + 7abc.$$

Bài tập 4: Với ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$(a) \quad a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geq 5(ab + bc + ca).$$

$$(b) 3(a^2 + b^2 + c^2) + 13(ab + bc + ca) \geq 48.$$

$$(c) a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Một bài toán có giả thiết khác có liên quan.

Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} \cos^2 A \cdot \cos^2 B + \cos^2 B \cdot \cos^2 C + \cos^2 C \cdot \cos^2 A \\ \leq \frac{1}{4}(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C). \end{aligned}$$

Một ứng dụng khác của các mệnh đề trên

Chúng ta thử đi theo hướng ngược lại. Khi gặp một bất đẳng thức đối xứng ba biến a, b, c . Ta có thể đặt $x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}$ để chuyển bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức ba biến x, y, z với điều kiện $xy + yz + zx + 2xyz = 1$.

Cũng từ cách chuyển đó, ta cũng có thể kết hợp phản chứng để chứng minh.

Một số bài toán áp dụng

(1) Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(2) Chứng minh với các số thực $a, b, c \in [1, 2]$, ta có bất đẳng thức sau

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 6 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

2.2. Mở rộng hơn

Trong phần này, chúng ta sẽ mở rộng giả thiết có dạng

$$\frac{1}{k+a} + \frac{1}{k+b} + \frac{1}{k+c} = 1.$$

Bằng các ý tưởng quen thuộc như mở rộng số mũ, hệ số, ... Trước khi chuyển qua phần mở rộng số biến. Cụ thể như sau

Vấn Đề 1: Với a, b, c là các số thực dương, k là số thực và n là số nguyên dương cho trước thỏa mãn

$$\frac{1}{k+a^n} + \frac{1}{k+b^n} + \frac{1}{k+c^n} = 1,$$

hoặc

$$\frac{1}{k+\sqrt[n]{a}} + \frac{1}{k+\sqrt[n]{b}} + \frac{1}{k+\sqrt[n]{c}} = 1.$$

Đối với các bất đẳng thức có giả thiết dạng này, ta cũng làm tương tự, và lưu ý rằng. Cách đổi

$$\frac{1}{k+a^n} = \frac{x^n}{x^n + y^n + z^n},$$

$$\frac{1}{k+b^n} = \frac{y^n}{x^n + y^n + z^n},$$

$$\frac{1}{k+c^n} = \frac{z^n}{x^n + y^n + z^n},$$

sẽ giúp bất đẳng thức thu được “dễ nhìn” hơn cách đổi

$$\frac{1}{k+a^n} = \frac{x}{x+y+z},$$

$$\frac{1}{k+b^n} = \frac{y}{x+y+z},$$

$$\frac{1}{k+c^n} = \frac{z}{x+y+z}.$$

Lời giải cho bài toán sau đây sẽ làm sáng tỏ nhận định trên

Ví dụ 5. Cho các số thực dương $a, b, c > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} + \frac{1}{c^2-1} = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \leq 1.$$

Lời giải 1. Từ giả thiết ta suy ra tồn tại các số m, n, p sao cho

$$\frac{1}{a^2 - 1} = \frac{m^2}{m^2 + n^2 + p^2},$$

$$\frac{1}{b^2 - 1} = \frac{n^2}{m^2 + n^2 + p^2},$$

$$\frac{1}{c^2 - 1} = \frac{p^2}{m^2 + n^2 + p^2},$$

hoặc là

$$a = \sqrt{\frac{2m^2 + n^2 + p^2}{m^2}},$$

$$b = \sqrt{\frac{m^2 + 2n^2 + p^2}{n^2}},$$

$$c = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 + 2p^2}{p^2}}.$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{m}{m + \sqrt{2m^2 + n^2 + p^2}} + \frac{n}{n + \sqrt{m^2 + 2n^2 + p^2}} + \frac{p}{p + \sqrt{m^2 + n^2 + 2p^2}} \leq 1.$$

Sử dụng đánh giá $4(2m^2 + n^2 + p^2) \geq (2m + n + p)^2$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{m}{4m + n + p} + \frac{n}{m + 4n + p} + \frac{p}{m + n + 4p} \leq \frac{1}{2}.$$

Sử dụng kỹ thuật tìm thêm bớt, ta có

$$\frac{1}{4} - \frac{m}{4m + n + p} = \frac{n + p}{4(4m + n + p)}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{m + n}{m + n + 4p} + \frac{n + p}{n + p + 4m} + \frac{p + m}{p + m + 4n} \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sum \frac{m + n}{4p + m + n} \geq \frac{4(m + n + p)^2}{\sum (4p + m + n)(m + n)}.$$

Do vậy, cần chứng minh:

$$\frac{4(m + n + p)^2}{\sum (4p + m + n)(m + n)} \geq 1.$$

Biến đổi và thu gọn bất đẳng thức trên, ta được

$$m^2 + n^2 + p^2 \geq mn + np + pm.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên, nên phép chứng minh của chúng ta hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$. $\square$

Một số bài toán áp dụng

- 1) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} + \frac{1}{1 + c^2} \geq \frac{3}{2}.$$

- 2) Tìm hằng số dương k tốt nhất sao cho với mọi a, b, c không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$, thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{2 + \sqrt[k]{a}} + \frac{1}{2 + \sqrt[k]{b}} + \frac{1}{2 + \sqrt[k]{c}} \geq 1.$$

- 3) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{2 + a^2} + \frac{1}{2 + b^2} + \frac{1}{2 + c^2} \leq 1.$$

Vấn Đề 2: Với a, b, c là các số thực dương và k là số thực cho trước thỏa mãn

$$\frac{1}{ma+n} + \frac{1}{mb+n} + \frac{1}{mc+n} = 1.$$

Đẳng thức trên tương đương

$$n^3 - 3n^2 + (mn^2 - 2mn)(a+b+c) + (m^2n - m^2)(ab+bc+ca) + m^3abc = 0.$$

Cách đổi biến hoàn toàn tương tự, ta thấy tồn tại các số dương x, y, z sao cho

$$\frac{1}{ma+n} = \frac{x}{x+y+z}, \frac{1}{mb+n} = \frac{y}{x+y+z}, \frac{1}{mc+n} = \frac{z}{x+y+z}.$$

Suy ra cách biểu diễn a, b, c theo x, y, z .

Vấn Đề 3: Với a, b, c là các số thực và k là số thực cho trước, thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(b)} + \frac{1}{f(c)} = 1.$$

Trong đó $f(a), f(b), f(c)$ đều là các đa thức dương.

Nhận xét: Cách đổi biến hoàn toàn tương tự, ta thấy tồn tại ba số dương x, y, z sao cho

$$\frac{1}{f(a)} = \frac{m}{m+n+p}, \frac{1}{f(b)} = \frac{n}{m+n+p}, \frac{1}{f(c)} = \frac{p}{m+n+p}.$$

Một số bài toán áp dụng

1) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{5a+4}} + \frac{1}{\sqrt{5b+4}} + \frac{1}{\sqrt{5c+4}} \leq 1.$$

2) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+\sqrt{3a+1}} + \frac{1}{1+\sqrt{3b+1}} + \frac{1}{1+\sqrt{3c+1}} \leq 1.$$

3) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z = xyz$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Tiếp theo, ta sẽ mở rộng vấn đề bằng cách mở rộng mẫu thức thành các biểu thức 2 biến.

Vấn Đề 4: Với a, b, c là các số thực và x, y, z là số thực cho trước sao cho

$$\frac{1}{xa+yb+z} + \frac{1}{xb+yc+z} + \frac{1}{xc+ya+z} = 1.$$

Nhận xét: Cách đổi biến tương tự, cần giải hệ phương trình ẩn a, b, c

$$xa+yb+z = \frac{m+n+p}{m}, \quad xb+yc+z = \frac{m+n+p}{n}, \\ xc+ya+z = \frac{m+n+p}{p}.$$

Một số bài toán áp dụng

1) Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

3) Cho a, b, c là các số thực dương và đặt $r = \sqrt[3]{abc} \leq 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq \frac{3}{1+2r}.$$

Vấn Đề 5: Với a, b, c là các số thực dương và x, y, z là số thực cho trước, thỏa mãn

$$\frac{1}{f(a,b)} + \frac{1}{f(b,c)} + \frac{1}{f(c,a)} = 1.$$

Trong đó, f là một hàm hai biến.

Nhận xét: Cách đổi biến X , ta thấy tồn tại ba số dương m, n, p sao cho

$$\frac{1}{f(a,b)} = \frac{p}{m+n+p}, \quad \frac{1}{f(b,c)} = \frac{m}{m+n+p}, \quad \frac{1}{f(c,a)} = \frac{n}{m+n+p}.$$

Một số bài toán áp dụng

- 1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{5-6ab} + \frac{1}{5-6bc} + \frac{1}{5-6ca} \leq 1.$$

- 2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}.$$

- 3) Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{6-ab} + \frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} \leq \frac{3}{5}.$$

- 4) Cho ba số không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

- 5) Cho các số dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{3}{8}.$$

- 6) Chứng minh bất đẳng thức sau luôn đúng với các số thực không âm a, b, c tùy ý có tổng bằng 3.

$$\frac{1}{c^2+a+b} + \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{b^2+c+a} \leq 1.$$

Vấn Đề 6: Với a, b, c là các số thực dương và x, y, z, k là số thực cho trước, thỏa mãn

$$\frac{1}{xa+yb+zc+k} + \frac{1}{xb+yc+za+k} + \frac{1}{xc+ya+zb+k} = 1.$$

Nhận xét: Để đổi biến, cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xa+yb+zc = \frac{m+n+p}{p} - k \\ xb+yc+za = \frac{m+n+p}{p} - k \\ xc+ya+zb = \frac{m+n+p}{p} - k \end{cases}$$

Một số bài toán áp dụng.

- 1) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}.$$

Vấn Đề 7: Với a, b, c là các số thực x, y, z , và k là số thực cho trước, thỏa mãn

$$\frac{1}{f(a,b,c)} + \frac{1}{f(b,c,a)} + \frac{1}{f(c,a,b)} = 1.$$

Trong đó, f là một hàm 3 biến.

Nhận xét: Cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{f(a,b,c)} = \frac{x}{x+y+z} \\ \frac{1}{f(b,c,a)} = \frac{y}{x+y+z} \\ \frac{1}{f(c,a,b)} = \frac{z}{x+y+z} \end{cases}$$

Một số bài toán áp dụng

- 1) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$.
Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{4b^2 + c^2 + a^2} + \frac{1}{4c^2 + a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}.$$

- 2) Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

- 3) Chứng minh với mọi số thực dương a, b, c thì

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq 1.$$

2.3. Kết hợp với các phương pháp phản chứng

Xét dạng toán sau: Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $f(a, b, c) = 0$. Chứng minh bất đẳng thức $g(a, b, c) \geq 0$.

Nhận xét: Để giải bài toán trên, ta có thể lập luận như sau

- (i) Ý tưởng 1: Ta có thể tăng (hoặc giảm) các số a, b, c sao cho $g(a, b, c) < 0$. Có thể giả sử là tăng các số a, b, c (trường hợp giảm tương tự) để thu được $g(a, b, c) < 0$. Khi đó, ta cần chứng minh

$$f(a, b, c) > 0, \forall a, b, c \in D = \{a, b, c \mid g(a, b, c) < 0\},$$

hoặc

$$f(a, b, c) < 0, \forall a, b, c \in D = \{a, b, c \mid g(a, b, c) < 0\}.$$

Để suy ra mâu thuẫn. Từ đó, bất đẳng thức $g(a, b, c) \geq 0$ được chứng minh.

- (ii) Ý tưởng 2: Cũng tương tự như ý tưởng trên. Ta có thể tăng, (hoặc giảm) các số a, b, c sao cho $g(a, b, c) < 0$. Có thể giả sử là tăng các số a, b, c (trường hợp giảm tương tự) để thu được $g(a, b, c) \leq 0$. Khi đó, ta cần chứng minh

$$f(a, b, c) \geq 0, \forall a, b, c \in D = \{a, b, c \mid g(a, b, c) < 0\},$$

hoặc

$$f(a, b, c) \leq 0, \forall a, b, c \in D = \{a, b, c \mid g(a, b, c) < 0\}.$$

Để suy ra mâu thuẫn. Từ đó, bất đẳng thức $g(a, b, c) \geq 0$ được chứng minh.

Ta cần quan tâm tới đẳng thức $f(a, b, c) = 0$ xảy ra với giá trị nào của bộ (a, b, c) . Cụ thể hơn, ta cần $f(a, b, c) = 0$ chỉ khi $g(a, b, c) = 0$. Vì nếu $f(a, b, c) = 0$ khi $g(a, b, c) < 0$ thì coi như ta không được gì.

Nhận xét: Cũng có thể thay đổi giả thiết bài toán trên thành $f(a, b, c) > 0$ hoặc $f(a, b, c) < 0$ hoặc $f(a, b, c) \geq 0$ hoặc $f(a, b, c) \leq 0$. Khi đó, giả thiết phản chứng sẽ mang dấu ngược lại.

Chúng ta cùng tìm hiểu ứng dụng của phương pháp trên đây. Trước hết, ta nhắc lại ví dụ đã đề cập ở phần trước.

Ví dụ 5. Cho các số thực dương $a, b, c > 1$, thỏa mãn

$$\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - 1} + \frac{1}{c^2 - 1} = 1.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \leq 1.$$

Lời giải 2. Giả sử

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1.$$

Khi đó, cần chứng minh:

$$\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - 1} + \frac{1}{c^2 - 1} \geq 1.$$

Sử dụng mệnh đề ở phần trước, suy ra cần chứng minh bất đẳng thức sau (với m, n, p là các số dương)

$$\frac{m^2}{(m+n+p)(n+p-m)} + \frac{n^2}{(m+n+p)(p+m-n)} + \frac{p^2}{(m+n+p)(m+n-p)} \geq 1.$$

Bất đẳng thức trên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\frac{m^2}{n+p-m} + \frac{n^2}{p+m-n} + \frac{p^2}{m+n-p} \geq \frac{(m+n+p)^2}{m+n+p} \geq m+n+p.$$

□

Một số bài toán áp dụng

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.
Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.
Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} + \frac{1}{2+c^2} \leq 1.$$

3. Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$,
thì

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1.$$

4. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thỏa mãn
 $abc = 1$, thì

$$\frac{a}{\sqrt{7+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{7+c+a}} + \frac{c}{\sqrt{7+a+b}} \geq 1.$$

$$\frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{7+c^2+a^2}} + \frac{c}{\sqrt{7+a^2+b^2}} \geq 1.$$

5. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thỏa mãn
 $ab + bc + ca = 1$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}.$$

6. Chứng minh rằng với a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$, thì

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1.$$

Vấn Đề 8: Với n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{1}{a_1+k} + \frac{1}{a_2+k} + \dots + \frac{1}{a_n+k} = 1.$$

Nhận xét: Cách đổi biến, luôn tồn tại các số dương $b_1, b_2, \dots, b_n$ sao cho

$$\frac{1}{a_i+k} = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^n b_j}, \forall i = \overline{1, n}.$$

Hay có thể viết dưới dạng $a_i = \frac{\sum_{j=1}^n b_j}{b_i} - k$, với điều kiện

$$\sum_{j=1}^n b_j > kb_i, \forall i = \overline{1, n}.$$

Ví dụ 6. Cho các số thực dương a, b, c, d, e thỏa mãn

$$\frac{1}{4+a} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{4+c} + \frac{1}{4+d} + \frac{1}{4+e} = 1.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{4+a^2} + \frac{b}{4+b^2} + \frac{c}{4+c^2} + \frac{d}{4+d^2} + \frac{e}{4+e^2} \leq 1.$$

Lời giải. Tương tự như bài trước, ta thấy tồn tại A, B, C, D, E sao cho

$$a = \frac{B+C+D+E-3A}{A},$$

và tương tự với b, c, d, e . Điều kiện $a = \frac{B+C+D+E}{A} - 3 > 0$
(b, c, d, e tương tự).

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $\frac{a}{4+a^2} \leq \frac{a}{2a+3}$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{2a+3} + \frac{b}{2b+3} + \frac{c}{2c+3} + \frac{d}{2d+3} + \frac{e}{2e+3} \leq 1.$$

Sử dụng phân tích

$$\frac{1}{2} - \frac{a}{2a+3} = \frac{3}{2(2a+3)} = \frac{3A}{2[2(B+C+D+E)-3A]}.$$

Ta có thể viết bất đẳng thức trên lại dưới dạng

$$\sum \frac{A}{2(B+C+D+E)-3A} \geq 1.$$

Đến đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được

$$\sum \frac{A}{2(B+C+D+E)-3A} \geq \frac{(\sum A)^2}{-3 \sum A^2 + 4 \sum_{sym} AB}.$$

Cuối cùng, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$4 \sum A^2 \geq 2 \sum_{sym} AB.$$

Bất đẳng thức này dễ dàng chứng minh theo bất đẳng thức AM-GM. Do đó ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = e = 1$. $\square$

Ví dụ 7. Giả sử các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d = 4$. Chứng minh

$$\frac{1}{11+a^2} + \frac{1}{11+b^2} + \frac{1}{11+c^2} + \frac{1}{11+d^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 8. Cho a, b, c, d, e là các số thực không âm, thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 5$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{7-2a} + \frac{1}{7-2b} + \frac{1}{7-2c} + \frac{1}{7-2d} + \frac{1}{7-2e} \leq 1.$$

Một số bài toán áp dụng.

1. Giả sử các số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = \frac{n}{2}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{x_i + x_j}.$$

2. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + \dots + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1.$$

3. Nếu $a_1 a_2 \dots a_n = r^n \leq 1$, thì

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + \dots + \frac{1}{n-1+a_n} \leq \frac{n}{n-1+r^n}.$$

4. Nếu $a_1 a_2 \dots a_n = r^n \leq 1$, và $k \geq n-1$ thì

$$\frac{1}{k+a_1} + \frac{1}{k+a_2} + \dots + \frac{1}{k+a_n} \leq \frac{n}{k+1}.$$

5. Giả sử rằng $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_n+1} = 1$. Chứng minh

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq (n-1)^n.$$

6. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương có tích bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_n}} \geq 1.$$

7. Cho các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + \dots + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1.$$

8. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{1+a_1^2} + \frac{1}{1+a_2^2} + \dots + \frac{1}{1+a_n^2} = 1. \text{ Chứng minh bất đẳng thức}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq (n-1) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

9. Cho các số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{n-1+a_1^2} + \frac{1}{n-1+a_2^2} + \dots + \frac{1}{n-1+a_n^2} \leq 1.$$

10. Cho các số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$ có tích bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+x_1+x_2+\dots+x_{n-1}} + \frac{1}{1+x_2+\dots+x_n} + \dots + \frac{1}{1+x_n+x_1+\dots+x_{n-2}} \leq 1.$$

11. Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa mãn $\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} +$

$$\frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1. \text{ Chứng minh bất đẳng thức } abcd \geq 3.$$

12. Cho các số thực không âm a, b, c, d, e thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 5$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{7-2a} + \frac{1}{7-2b} + \frac{1}{7-2c} + \frac{1}{7-2d} + \frac{1}{7-2e} \leq 1.$$

13. Cho các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+4n(n-1)a_1}} + \frac{1}{1+\sqrt{1+4n(n-1)a_2}} + \dots + \frac{1}{1+\sqrt{1+4n(n-1)a_n}} \geq \frac{1}{2}.$$

14. Cho các số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i x_j}{(1-x_i)(1-x_j)} \geq \frac{n}{2(n-1)}.$$

15. Cho các số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2+x_1^2} + \frac{1}{2+x_2^2} + \dots + \frac{1}{2+x_n^2} \geq \frac{3n-2}{6}.$$

16. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n =$

1. Nếu $0 < p < \sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{(1+pa_1)^2} + \frac{1}{(1+pa_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+pa_n)^2} \leq \frac{n}{(1+p)^2}.$$

17. Cho x, y, z, t là bốn số dương và $xyzt = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \geq 1.$$

18. Các số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq (n-1)^n.$$

19. Với các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tổng bằng 1, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}}.$$

20. Cho các số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$. Đặt

$$y_i = x_1 x_2 \cdots x_{i-1} x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_n.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x_1}{\sqrt[n-1]{x_1^{n-1} + (n^{n-1} - 1)y_1}} + \frac{x_2}{\sqrt[n-1]{x_2^{n-1} + (n^{n-1} - 1)y_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt[n-1]{x_n^{n-1} + (n^{n-1} - 1)y_n}} \geq 1.$$

21. Giả sử các số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ có tổng bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

22. Với các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tích bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + \dots + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1.$$

23. Cho các số thực không âm a, b, c, d có tổng bằng 4. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-dab} \leq 1.$$

24. Giả sử a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{3-abc} + \frac{1}{3-bcd} + \frac{1}{3-cda} + \frac{1}{3-dab} \leq 2.$$

25. Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực nhỏ hơn $n^2 + 1$ và có tổng bằng n^3 thì

$$\sqrt{\frac{n^2+1}{a_1}} - 1 + \sqrt{\frac{n^2+1}{a_2}} - 1 + \dots + \sqrt{\frac{n^2+1}{a_n}} - 1 \leq 1.$$

26. Chứng minh nếu $\sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0$ thì

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \dots + \frac{1}{1+x_n^2} \leq \frac{n^3}{n^2+1}.$$

27. Cho các số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1, \forall i = \overline{1, n}$ và k là một hằng số dương tùy ý sao cho $k \geq n-1$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{k+a_1} + \frac{1}{k+a_2} + \dots + \frac{1}{k+a_n} \leq \frac{n}{k+1}.$$

28. Chứng minh rằng nếu các số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$ có tổng bằng n thì bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{x_1}{k+x_1^2} + \frac{x_2}{k+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{k+x_n^2} \leq \frac{n}{k+1}.$$

Trong đó $k = k_n = \frac{n^2 + 2n - 2 - 2\sqrt{(n^2 - 1)(2n - 1)}}{(n - 2)^2}$ khi

$$n \geq 3 \text{ và } k = \frac{1}{3} \text{ khi } n = 2.$$

Ngoài ra hãy chứng minh đó là các giá trị tốt nhất của k_n .

29. Tìm hằng số $k = k_n$ tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi số $x_1, x_2, \dots, x_n, x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$ và $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_n x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+k_n x_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+k_n x_n}} \leq n - 1.$$

30. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \dots + \frac{1}{1+x_n^2} = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq (n-1) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right).$$

31. Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+ab+bc+ca} + \frac{1}{1+bc+cd+da} + \frac{1}{1+cd+da+db} + \frac{1}{1+da+ab+bd} \leq 1.$$

2.4. Một số vấn đề khác

Chúng ta có thể thay a, b, c bởi $f(a, b, c), f(b, c, a), f(c, a, b)$ để thu được các hệ quả của các vấn đề trên. Chẳng hạn ta có thể thay $(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ để thu được các kết quả như

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1,$$

hoặc

$$\frac{a}{1+ka} + \frac{b}{1+kb} + \frac{c}{1+kc} = 1.$$

Trong thực tế, có một số giả thiết rắc rối, phức tạp, nhưng thực chất chúng chỉ là hệ quả của các kết quả trên. Nếu biết đặt ẩn một cách thích hợp, chúng ta sẽ quy bài toán về một trong những dạng quen thuộc trên.

Một số bài toán áp dụng

1. Cho các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \dots + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Dãy số $u_{n+1} = u_n + (u_n)^\alpha$

2. Giả sử a, b, c là ba số dương thỏa mãn $a+b+c \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Tài liệu tham khảo

- [1] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Two useful substitutions*.
- [2] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Sử dụng phương pháp AM-GM để chứng minh bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.
- [3] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.
- [4] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri Thức.
- [5] Vasile Cirtoaje, Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Phân loại và phương pháp giải toán bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [6] Đoàn Quỳnh (chủ biên), *Tài liệu chuyên Toán: Giải tích 12*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [7] Trần Phương, *Chuyên đề luyện thi Đại học: Hệ thức lượng giác*.

DÃY SỐ $u_{n+1} = u_n + (u_n)^\alpha$

Kiều Đình Minh[†]

Đây là trường hợp đặc biệt của dãy số dạng $u_{n+1} = f(u_n)$. Tuy nhiên với dãy số dạng này vấn đề hội tụ của dãy thường không được đặt ra vì quá đơn giản (giới hạn chỉ có thể là 0 hoặc ∞). Trong bài viết này chúng ta chủ yếu xây dựng những đánh giá cho dãy hoặc tìm bậc tiệm cận của dãy, cụ thể là tìm β sao cho $u_n = O(n^\beta)$, tức là $\left|\frac{u_n}{n^\beta}\right|$ bị chặn.

Chúng ta cũng khảo sát dãy đã cho với các trường hợp cụ thể hay gặp của α như $\alpha = 2$; $\alpha = 3$; $\alpha = -1$; $\alpha = -2$; $\alpha = -\frac{1}{2}$ và một vài trường hợp α lớn hơn, riêng trường hợp $\alpha = 1$ là quá đơn giản nên chúng ta không xem xét đến. Để tiện cho sự theo dõi của bạn đọc chúng tôi nhắc lại định lý trung bình Cesaro và định lý Stolz (chi tiết xem thêm trong tài liệu giáo khoa chuyên toán Đại số và giải tích lớp 11).

Định lý 1 (Định lý Cesaro). Cho dãy số (x_n) . Khi đó, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n =$

$$L \text{ thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) = L.$$

Một cách tương đương

$$\text{Nếu } \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = L \text{ thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = L.$$

Định lý 2 (Định lý Stolz). Xét hai dãy số (x_n) và (y_n) , trong đó (y_n) là dãy số dương tăng và dần đến dương vô cùng. Khi đó, nếu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L \text{ thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = L.$$

[†]Trường THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ.

1. Giải quyết các trường hợp của α

1.1. Trường hợp $\alpha = -1$

Trường hợp này chúng ta hay gặp nhất trong giải toán. Vì vậy chúng tôi đưa lên khảo sát trước tiên.

Bài toán 1. Cho dãy số (u_n) :

$$u_1 = a \ (a > 0); \ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \ \forall n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + 2(n-1)} \leq u_n \leq \sqrt{a^2 + 2(n-1) + \sqrt{\frac{n-1}{2(a^2+1)}}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Lời giải. Trước hết ta có một số nhận xét về dãy này

$$u_n > 0, \forall n$$

$$(u_n) \text{ là dãy tăng thực sự và } u_n \geq u_1, \forall n$$

Ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1}^2 &= \left(u_k + \frac{1}{u_k} \right)^2 = u_k^2 + \frac{1}{u_k^2} + 2 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(u_k^2 + \frac{1}{u_k^2} + 2 \right) \\ \Rightarrow u_n^2 &= u_1^2 + 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} u_n^2 &> u_1^2 + 2(n-1) \ \forall n \geq 2 \\ \Rightarrow u_n &> \sqrt{a^2 + 2(n-1)} \ \forall n \geq 2 \\ \Rightarrow u_n &\geq \sqrt{a^2 + 2(n-1)} \ \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Mặc khác ta lại có

$$\begin{aligned} u_k^2 &\geq u_1^2 + 2(k-1) \Rightarrow \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{u_1^2 + 2(k-1)} \\ \Rightarrow \frac{1}{u_k^4} &\leq \frac{1}{(u_1^2 + 2(k-1))^2} < \frac{1}{(u_1^2 + 2(k-1))^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_1^2 + 2k - 3} - \frac{1}{u_1^2 + 2k - 1} \right) \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^4} &< \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_1^2 + 2k - 1} - \frac{1}{u_1^2 + 2k + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_1^2 + 1} - \frac{1}{u_1^2 + 2n - 1} \right) < \frac{1}{2(u_1^2 + 1)} \quad \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski, ta có

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq \sqrt{(n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^4}} \leq \sqrt{\frac{(n-1)}{2(u_1^2 + 1)}} = \sqrt{\frac{n-1}{2(a^2 + 1)}}, \quad \forall n \geq 2$$

Do đó

$$\begin{aligned} u_n^2 &< u_1^2 + 2(n-1) + \sqrt{\frac{n-1}{2(a^2 + 1)}} \\ \Rightarrow u_n &< \sqrt{a^2 + 2(n-1) + \sqrt{\frac{n-1}{2(a^2 + 1)}}}, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Tóm lại

$$\sqrt{a^2 + 2(n-1)} \leq u_n \leq \sqrt{a^2 + 2(n-1) + \sqrt{\frac{n-1}{2(a^2 + 1)}}}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

□

Bài toán 2. Cho dãy số (u_n) :

$$u_1 = 5; \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Tìm phần nguyên $[u_{1001}]$.

Lời giải. Áp dụng kết quả của bài toán 1 ta có

$$\sqrt{2025} < u_{1001} < \sqrt{2025 + \sqrt{\frac{1000}{48}}}$$

$$\Rightarrow 45 < u_{1001} < 45,5 \Rightarrow [u_{1001}] = 45. \quad \square$$

Bài toán 3. Cho dãy số (u_n) :

$$u_1 = 1; \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{\sqrt{n}} \right)$.

Lời giải. Áp dụng kết quả của bài toán 1 ta có

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} &\leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{2n-1} + \sqrt{\frac{n-1}{4}}}{\sqrt{n}} \\ \Rightarrow \sqrt{2 - \frac{1}{n}} &\leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}} \end{aligned}$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và theo nguyên lý kẹp suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{\sqrt{n}} \right) = \sqrt{2}. \quad \square$$

Nhận xét: Với bài toán này ta có thể làm cách khác như sau:

Để thấy $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}^2 - u_n^2}{2(n+1) - 2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{u_n^2}}{2} = 1.$$

Theo định lý Stolz thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2}{2n} = 1$

1.2. Trường hợp $\alpha = -2$

Đây cũng là trường hợp mà chúng ta hay gặp. Chúng ta cùng xem xét các bài toán sau

Bài toán 4. Cho dãy số (u_n) :

$$u_1 = a \ (a > 0); \ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} \ \forall n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a^3 + 3(n-1)} \leq u_n$$

$$< \sqrt[3]{a^3 + 3\left(n-1 + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{a^6} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \ \forall n \geq 1$$

Lời giải. Ta cũng có nhận xét như trên

$$u_n > 0, \ \forall n$$

(u_n) là dãy tăng thực sự và $u_n \geq u_1, \ \forall n$

Với mọi $k \geq 1$, ta có

$$u_{k+1}^3 = u_k^3 + 3 + \frac{3}{u_k} + \frac{1}{u_k^6} \Rightarrow u_{k+1}^3 > u_k^3 + 3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^3 > \sum_{k=1}^{n-1} (u_k^3 + 3)$$

$$\text{Suy ra } u_n^3 > u_1^3 + 3(n-1) \Rightarrow u_n > \sqrt[3]{a^3 + 3(n-1)}, \ \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow u_n \geq \sqrt[3]{a^3 + 3(n-1)}, \ \forall n \geq 1.$$

Lại có

$$u_{k+1}^3 < u_k^3 + 3 + \frac{3}{u_1^3 + 3(k-1)} + \frac{1}{(u_1^3 + 3(k-1))^2}$$

$$< u_k^3 + 3 + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{9(k-1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n-1} u_{k+1}^3 < \sum_{k=2}^{n-1} \left(u_k^3 + 3 + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{9(k-1)^2} \right)$$

$$\Rightarrow u_n^3 < u_2^3 + 3(n-2) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k-1} + \frac{1}{9} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k-1)^2}$$

$$= u_1^3 + 3(n-1) + \frac{3}{u_1^3} + \frac{1}{u_1^6} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k^2}, \ \forall n \geq 3.$$

$$\text{Dãy số } u_{n+1} = u_n + (u_n)^\alpha$$

Suy ra

$$u_n^3 < a^3 + 3\left(n-1 + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{a^6} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \ \forall n \geq 1.$$

Tóm lại ta có:

$$\sqrt[3]{a^3 + 3(n-1)} \leq u_n$$

$$< \sqrt[3]{a^3 + 3\left(n-1 + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{a^6} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \ \forall n \geq 1.$$

□

Chúng ta để kết quả đánh giá vế phải của bất đẳng thức trên như vậy để tùy thuộc vào hoàn cảnh cụ thể mà sử dụng ngắt đánh giá cho hợp lý.

Bài toán 5. Cho dãy số (u_n) :

$$u_1 = a \ (a > 0); \ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}, \ \forall n = 1, 2, \dots$$

a) Chứng minh rằng tồn tại $p, q > 0$ sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n^p}{n} \right) = q$.
Hãy tìm giới hạn đó.

b) Chứng minh rằng tồn tại $r > 0$ sao cho $\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^4} < r, \ \forall n \geq 1$

Lời giải. a) Áp dụng kết quả bài toán 4 ta có

$$\frac{a^3 + 3(n-1)}{n} \leq \frac{u_n^3}{n}$$

$$< \frac{a^3 + 3(n-1)}{n} + \frac{3}{na^3} + \frac{1}{na^6} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{9n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$< \frac{a^3 + 3(n-1)}{n} + \frac{3}{na^3} + \frac{1}{na^6} + \frac{\sqrt{2n}}{n} + \frac{2}{9n}.$$

Vì

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \sqrt{n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} < \sqrt{2n}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và theo nguyên lý kẹp ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n^3}{n} \right) = 3. \text{ Vậy } p = q = 3.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} &= \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{u_k^3 u_{k+1}} > \frac{1}{u_{k+1}^4} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^4} &< \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right) = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^4} &< \frac{2}{u_1} = \frac{2}{a} \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Chọn $r = \frac{2}{a}$ ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét: Phần a) ta có thể dùng định lý trung bình Cesaro như sau:

$$\text{Vì } u_n^3 - u_{n-1}^3 = 3 + \frac{3}{u_{n-1}^3} + \frac{1}{u_{n-1}} \rightarrow 3 \Rightarrow \frac{u_n^3}{n} \rightarrow 3. \text{ Do đó } p = q = 3.$$

1.3. Trường hợp $\alpha = -\frac{1}{2}$

Bài toán 6. Cho dãy số (u_n) :

$$u_1 = a \ (a > 0); \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}} \quad \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $\forall n = 1, 2, \dots$

$$\sqrt[3]{\left(a\sqrt{a} + \frac{3}{2}(n-1)\right)^2} \leq u_n$$

$$< \sqrt[3]{\left(\frac{3(n-1) + \sqrt{2(n-1)}}{2} + a\sqrt{a} + \frac{3}{4a\sqrt{a}} + \frac{1}{8a^3} + \frac{1}{9}\right)^2}.$$

Lời giải. Từ công thức truy hồi của dãy ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1}^3 &= \left(u_k + \frac{1}{\sqrt{u_k}}\right)^3 \\ &= u_k^3 + 3u_k^{\frac{3}{2}} + 3 + \frac{1}{\sqrt{u_k^3}} \\ &> u_k^3 + 3u_k^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{4} = \left(u_k^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\right)^2 \\ u_{k+1}^{\frac{3}{2}} &> u_k^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^{\frac{3}{2}} > \sum_{k=1}^{n-1} \left(u_k^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\right) \\ &\Rightarrow u_n^{\frac{3}{2}} > u_1^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(n-1) = a\sqrt{a} + \frac{3}{2}(n-1). \end{aligned}$$

Mặt khác lại có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \left(\sqrt{u_k} + \frac{1}{2u_k}\right)^2 - \frac{1}{4u_k^2} < \left(\sqrt{u_k} + \frac{1}{2u_k}\right)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{u_{k+1}} &< \sqrt{u_k} + \frac{1}{2u_k} \\ \Rightarrow u_{k+1}^{\frac{3}{2}} &< u_k^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4u_k^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{8u_k^3} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^{\frac{3}{2}} &< \sum_{k=1}^{n-1} \left(u_k^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4u_k^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{8u_k^3}\right) \\ \Rightarrow u_n^{\frac{3}{2}} &< a\sqrt{a} + \frac{3}{2}(n-1) + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^3} \end{aligned}$$

Để ý rằng ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^{\frac{3}{2}}} &< \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a\sqrt{a} + \frac{3}{2}(k-1)} \\ &< \frac{1}{a\sqrt{a}} + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ &< \frac{1}{a\sqrt{a}} + \frac{2}{3} \sqrt{2(n-1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^3} &< \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left[a\sqrt{a} + \frac{3}{2}(k-1)\right]^2} \\
&< \frac{1}{a^3} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{4}{9(k-1)^2} \\
&= \frac{1}{a^3} + \frac{4}{9} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k^2} \\
&< \frac{1}{a^3} + \frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{1}{a^3} + \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
u_n^{\frac{3}{2}} &< a\sqrt{a} + \frac{3}{2}(n-1) + \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} \sqrt{2(n-1)} + \frac{1}{a\sqrt{a}} \right) + \frac{1}{8a^3} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{3(n-1) + \sqrt{2(n-1)}}{2} + a\sqrt{a} + \frac{3}{4a\sqrt{a}} + \frac{1}{8a^3} + \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Tóm lại, $\forall n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\left(a\sqrt{a} + \frac{3}{2}(n-1)\right)^2} &\leq u_n \\
&< \sqrt[3]{\left(\frac{3(n-1) + \sqrt{2(n-1)}}{2} + a\sqrt{a} + \frac{3}{4a\sqrt{a}} + \frac{1}{8a^3} + \frac{1}{9}\right)^2}.
\end{aligned}$$

□

Nhận xét: Đánh giá trên chưa thật sự chặt do ta đã làm trội qua một số bước trung gian, tuy nhiên chỉ cần như vậy cũng đủ ứng dụng trong các bài toán giới hạn của dãy số. Chẳng hạn như bài toán sau

Bài toán 7 (Chọn đội tuyển Việt Nam dự IMO 1993). Cho dãy số (u_n) :

$$u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}, \forall n \geq 1.$$

Tìm số thực p sao cho dãy số $\left(\frac{u_n^p}{n}\right), n \geq 1$ có giới hạn hữu hạn khác không.

Lời giải. Áp dụng kết quả của bài toán 6 ta có

$$\begin{aligned}
\frac{a\sqrt{a} + \frac{3}{2}(n-1)}{n} &< \frac{u_n^{\frac{3}{2}}}{n} \\
&< \frac{3(n-1) + \sqrt{2(n-1)}}{2n} + \frac{a\sqrt{a} + \frac{3}{4a\sqrt{a}} + \frac{1}{8a^3} + \frac{1}{9}}{n}.
\end{aligned}$$

$$\text{Với } a = 1 \text{ thì } \frac{3}{2} - \frac{1}{2n} \leq u_n^{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2} - \frac{3}{2n} + \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} + \frac{143}{72n}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và theo nguyên lý kẹp ta

$$\text{được } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n^{\frac{3}{2}}}{n} \right) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Nếu } p > \frac{3}{2} \text{ thì } \frac{u_n^p}{n} = \frac{u_n^{\frac{3}{2}}}{n} \cdot u_n^{p-\frac{3}{2}} \rightarrow +\infty. \text{ Nếu } p < \frac{3}{2} \text{ thì } \frac{u_n^p}{n} \rightarrow 0.$$

Vậy $p = \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm. □

Nhận xét: Sau khi chỉ ra được $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ và có được $p = \frac{3}{2}$ (nhờ xấp xỉ $u_{n+1}^p = u_n^p \left(1 + \frac{1}{u_n^{\frac{3}{2}}}\right) \approx u_n^p \left(1 + \frac{p}{u_n^{\frac{3}{2}}}\right) = u_n^p + pu_n^{p-\frac{3}{2}}$) thì ta có thể làm theo một trong hai cách sau mà không sử dụng đánh giá như trên.

Thứ nhất: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}^{\frac{3}{2}} - u_n^{\frac{3}{2}})$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\sqrt{u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}} - \sqrt{u_n} \right) \left(u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}} + \sqrt{u_n^2 + \sqrt{u_n}} + u_n \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{u_n^2 + \sqrt{u_n}} + u_n} \left(2u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}} + \sqrt{u_n^2 + \sqrt{u_n}} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_n\sqrt{u_n}}} + 1} \left(2 + \frac{1}{u_n\sqrt{u_n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{u_n\sqrt{u_n}}} \right) \right] = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Thứ hai:

$$u_{n+1}^{\frac{3}{2}} - u_n^{\frac{3}{2}} = \left(u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}\right)^{\frac{3}{2}} - u_n^{\frac{3}{2}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{u_n^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{u_n^{\frac{1}{2}}}}.$$

Đặt $x_n = \frac{1}{u_n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$.

Khi đó áp dụng quy tắc L'Hôpital ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}^{\frac{3}{2}} - u_n^{\frac{3}{2}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+x_n)^{\frac{3}{2}} - 1}{x_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - 1}{x} = \frac{3}{2}.$$

Cuối cùng, áp dụng định lý trung bình Cesaro thì

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n^{\frac{3}{2}}}{n}\right) = \frac{3}{2}.$$

1.4. Trường hợp $\alpha = -\frac{1}{3}$

Bài toán 8. Cho dãy số (u_n) :

$$u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt[3]{u_n}}, n = 1, 2, \dots$$

Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy $\left(\frac{u_n^\alpha}{n}\right), n = 1, 2, \dots$ hội tụ và tìm giới hạn khác không của nó.

Lời giải. Ta có $u_n > 0 \forall n \geq 1$ và $u_n^4 > \left(\sqrt[3]{u_{n-1}^4} + \frac{4}{3}\right)^3, \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{u_n^4} > \sqrt[3]{u_{n-1}^4} + \frac{4}{3}, \forall n \geq 2 \Rightarrow \sqrt[3]{u_n^4} > \frac{4}{3}(n-1), \forall n \geq 2. \quad (1)$$

Mặt khác

$$u_k = \left(\sqrt[3]{u_{k-1}} + \frac{1}{3u_{k-1}}\right)^3 - \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{u_{k-1}^5}} + \frac{1}{27u_{k-1}^3}\right), \forall k \geq 2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{u_k^4} &< \left(\sqrt[3]{u_{k-1}} + \frac{1}{3u_{k-1}}\right)^4 \\ &= \sqrt[3]{u_{k-1}^4} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{u_{k-1}^4}} + \frac{4}{27\sqrt[3]{u_{k-1}^8}} + \frac{1}{81u_{k-1}^4} \forall k \geq 2. \end{aligned}$$

Do đó với mọi $n \geq 4$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{u_n^4} &< 1 + \frac{4}{3}(n-1) + \frac{2}{3} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[3]{u_{k-1}^4}} + \\ &+ \frac{4}{27} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[3]{u_{k-1}^8}} + \frac{1}{81} \sum_{k=2}^n \frac{1}{u_{k-1}^4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Dựa vào (1) và bất đẳng thức Bunyakovski ta có

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[3]{u_{k-1}^4}} &= 1 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{\sqrt[3]{u_{k-1}^4}} \\ &< 1 + \frac{3}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k-2} \\ &< 1 + \frac{3}{4} \sqrt{(n-2) \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-2)^2}} \\ &< 1 + \frac{3}{4} \sqrt{(n-2) \left(1 + \sum_{k=4}^n \frac{1}{(k-3)(k-2)}\right)} \\ &= 1 + \frac{3}{4} \sqrt{(n-2) \left(2 - \frac{1}{n-2}\right)} \\ &< 1 + \frac{3}{4} \sqrt{2(n-2)} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[3]{u_{k-1}^8}} &= 1 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{\left(\sqrt[3]{u_{k-1}^4}\right)^2} \\ &< 1 + \frac{9}{16} \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-2)^2} \\ &< 1 + \frac{9}{8} = \frac{17}{8} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{u_{k-1}^4} &= 1 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{\left(\sqrt[3]{u_{k-1}^4}\right)^3} \\ &< 1 + \frac{27}{64} \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-2)^3} \\ &< 1 + \frac{27}{64} \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-2)^2} \\ &< 1 + \frac{27}{32} = \frac{59}{32} \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (2), (3), (4) và (5) suy ra

$$\sqrt[3]{u_n^4} < \frac{4}{3}n + \frac{1}{2}\sqrt{2(n-2)} + \frac{35}{54} + \frac{1}{81} \cdot \frac{59}{32} \quad (6)$$

Từ (1), (6) ta được

$$\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{u_n^{\frac{4}{3}}}{n} < \frac{4}{3} + \frac{1}{2n}\sqrt{2(n-2)} + \frac{35}{54n} + \frac{1}{81} \cdot \frac{59}{32n}, \forall n \geq 4 \quad (7)$$

Chuyển qua giới hạn bất đẳng thức (7) khi $n \rightarrow +\infty$ ta được

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n^{\frac{4}{3}}}{n} \right) = \frac{4}{3}.$$

Lại do $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ nên suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{\alpha - \frac{4}{3}} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } \alpha > \frac{4}{3} \\ 0 & \text{khi } \alpha < \frac{4}{3} \end{cases}$$

Dãy số $u_{n+1} = u_n + (u_n)^\alpha$

mà

$$\frac{u_n^\alpha}{n} = \frac{u_n^{\frac{4}{3}}}{n} \cdot u_n^{\alpha - \frac{4}{3}}.$$

Do đó

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^\alpha}{n} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } \alpha > \frac{4}{3} \\ 0 & \text{khi } \alpha < \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $\alpha = \frac{4}{3}$ là giá trị duy nhất để $\left(\frac{u_n^\alpha}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$ hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n^{\frac{4}{3}}}{n} \right) = \frac{4}{3}.$$

□

1.5. Trường hợp $\alpha = 2$

Bài toán 9. Cho dãy số (u_n) : $u_1 \in (0; 1)$; $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \forall n \geq 1$.

Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 - nu_n)}{\ln n}$.

Lời giải. Ta chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Thật vậy, ta có

$$0 < u_2 = u_1(1 - u_1) \leq \left(\frac{u_1 + 1 - u_1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow u_2 \in (0; 1).$$

Bằng quy nạp ta được $u_n \in (0; 1) \forall n$.

Để thấy dãy đã cho giảm nên suy ra tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

Chuyển qua giới hạn biểu thức truy hồi đã cho ta có

$$a = a - a^2 \Leftrightarrow a = 0.$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Áp dụng định lý trung bình Cesaro, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{u_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - (u_n - u_n^2)}{(u_n - u_n^2)u_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - u_n} = 1.\end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$.

Áp dụng định lý Stolz ta có

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 - nu_n)}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n(1 - nu_n)}{u_n \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (nu_n) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - nu_n}{u_n \ln n} \\ &= 1 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{u_n} - n}{\ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{u_{n+1}} - (n+1) - \frac{1}{u_n} + n}{\ln(n+1) - \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{u_n(1 - u_n)} - \frac{1}{u_n} - 1}{\ln \frac{n+1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{(1 - u_n) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{(1 - 0) \ln e} = 1.\end{aligned}$$

□

Bài toán 10. Cho $a > 0; \alpha \in (0; 1)$. Xét dãy (u_n) :

$$u_1 > 0; u_{n+1} = (1 - \alpha)u_n + \frac{a\alpha}{u_n^\alpha}.$$

Chứng minh rằng dãy đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Xét hàm số

$$f(u) = (1 - \alpha)u + \frac{a\alpha}{u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}, u > 0, a > 0, \alpha \in (0; 1)$$

có $f'(u) = (1 - \alpha) \left(1 - au^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$ suy ra $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = a^\alpha$.

Lập bảng biến thiên ta có $f(u) \geq a^\alpha, \forall u > 0$.

Để thấy $u_n > 0 \forall n$ nên $u_n \geq a^\alpha \forall n \geq 2$.

Xét hiệu $u_k - u_{k-1} = \alpha u_{k-1}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(a - u_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}\right) \leq 0, \forall k \geq 2$.

Vậy (u_n) bắt đầu giảm từ u_2 và bị chặn dưới bởi a^α nên tồn tại giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Chuyển qua giới hạn hệ thức truy hồi đã cho ta có

$$l = (1 - \alpha)l + \frac{a\alpha}{l^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \Leftrightarrow l = a^\alpha.$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a^\alpha$. □

2. Bình luận

- Nếu $\alpha < 0$ thì ta xây dựng các bất đẳng thức dạng $A^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq u_n \leq B^{\frac{1}{1-\alpha}}$, ở đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B}{n} = L$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{1-\alpha}}{n} = L$.
- Nếu $\alpha > 0$ thì ta xây dựng các bài toán theo chiều hướng khác bằng cách lập dãy tổng hoặc sử dụng các định lý trung bình Cesaro, Stolz chẳng hạn như:

1) Cho $(x_n): x_1 = 1; x_{n+1} = x_n + x_n^2, n = 1, 2, \dots$. Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} \right)$.

2) Cho $(x_n): x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = x_n - x_n^2, n = 1, 2, \dots$. Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nx_n)$. Như đã nhận xét trong các bài toán trên thì việc tìm giới hạn của $\frac{u_n}{n^p}$ có thể được thực hiện bằng cách sử dụng định lý Stolz hoặc định lý trung bình Cesaro. Tuy nhiên với cách đánh giá và sử dụng nguyên lý kẹp thì lời giải bài toán tự nhiên hơn và cũng sơ cấp hơn.

3. Bài tập

1./ Cho dãy $(u_n) : u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \forall n = 1, 2, \dots$ Chứng

minh rằng $\sum_{i=1}^k \frac{1}{u_i} < \frac{7}{6} \forall k \geq 1$.

2./ Cho dãy $(u_n) : u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n} \forall n = 1, 2, \dots$ Chứng

minh rằng $\sum_{i=1}^k \frac{1}{u_i^4} < \frac{5}{4} \forall k \geq 1$

3./ Cho dãy $(u_n) : u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2u_n} \forall n = 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng $\sqrt{n}u_n < n + \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.

4./ Cho dãy $(u_n) : u_1 > 0; u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \forall n \geq 1 (a > 0)$.

Chứng minh dãy hội tụ và tìm giới hạn.

5./ Cho dãy $(u_n) : u_1 = a (a > 0); u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} \forall n = 1, 2, \dots$

Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt[3]{n}}$.

6./ Cho dãy $(u_n) : u_1 > 0; u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2u_n + \frac{a}{u_n^2}\right), \forall n = 1, 2, \dots$

$(a > 0)$. Tìm giới hạn của dãy số đó.

7./ Cho dãy $(u_n) : u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}} \forall n \geq 1$. Tìm m để

tồn tại giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{m}$.

8./ Cho dãy $(u_n) : u_1 \in (0; 1); u_{n+1} = u_n - u_n^2 \forall n \geq 1$. Tìm giới

hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}u_n$.

9./ Cho dãy $(u_n) : u_1 = \frac{1}{2}; u_{n+1} = u_n - u_n^2 \forall n \geq 1$. Tìm $p \in \mathbb{R}$ sao cho tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p (nu_n - 1)$.

10./ Cho dãy $(u_n) : u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^p} \forall n = 1, 2, \dots (p \in \mathbb{N}^*)$.

Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{p+1}}{n} = p + 1$.

11./ Cho dãy $(u_n) : u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt[p]{u_n}} \forall n = 1, 2, \dots$

$(p \in \mathbb{N}^*, p > 1)$. Chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{1+\frac{1}{p}}}{n} = 1 + \frac{1}{p}$.

12./ Cho dãy $(u_n) : u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + u_n^{2013} \forall n \geq 1$. Tìm giới

hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^{2012}}{u_{i+1}}$.

PHÂN HOẠCH NGUYÊN VÀ PHÂN HOẠCH TẬP HỢP

Lê Phúc Lữ†

Phân hoạch tập hợp và phân hoạch nguyên là các chủ đề khá thú vị thể hiện mối liên hệ sâu sắc giữa tổ hợp và số học, nó cũng xuất hiện ở nhiều kỳ thi Olympic các cấp. Những bài toán trong phần này rất phong phú, đa dạng và một số bài đòi hỏi các lập luận khó. Nhiều bài có thể giải bằng lý thuyết hàm sinh một cách rất tường minh nhưng để cho tính thuần túy của chủ đề, ta chỉ tập trung xem xét các cách tiếp cận bằng lập luận số học, tổ hợp thông thường. Dưới đây, chúng ta sẽ tìm hiểu một số công cụ chính và các kiến thức sơ lược để áp dụng xử lý các vấn đề. Bên cạnh các phần được khai thác chi tiết thì cũng có vài phần khác chỉ mang tính chất gợi mở và rất cần có sự chủ động của người đọc trong việc tìm hiểu sâu thêm nhằm bổ sung, hoàn chỉnh đầy đủ kiến thức cho mình trong nội dung thú vị này.

1. Số Stirling loại một và loại hai

1.1. Chu trình của một hoán vị

Trong các bài toán về phân hoạch tập hợp, ta không thể nào không nhắc đến các số Stirling. Đây là cơ sở để xây dựng các bài toán đếm một cách khá vững chắc, đồng thời kết hợp với các công cụ giải tích và đại số khác sẽ giúp xây dựng được nhiều lý thuyết khác.

Chu trình trong một hoán vị $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ của các số $1, 2, 3, \dots, n$ là một tập con của các số này mà chúng đổi vị trí cho nhau tạo thành một vòng. Ta xét hoán vị sau:

$$123456789 \xrightarrow{f} 142357698.$$

†Sinh viên trường Đại học FPT thành phố Hồ Chí Minh.

Chẳng hạn trong hoán vị trên: $f(2) = 4, f(3) = 2, f(4) = 3$ nên có thể nói $(2, 3, 4)$ tạo thành một chu trình. Các số không đổi qua phép hoán vị được coi là một chu trình riêng biệt và do đó, trong hoán vị trên có tất cả 5 chu trình: $(1), (423), (5), (76), (98)$.

1.2. Số Stirling loại I

Số hoán vị của n phần tử mà có đúng k chu trình, đặt là $s(n, k)$.

Công thức truy hồi $s(n+1, k) = s(n, k-1) + n \cdot s(n, k)$.

Chứng minh. Ta sẽ chia số hoán vị của $n+1$ mà có k chu trình thành hai loại:

- Loại 1 gồm các hoán vị mà phần tử $\{n+1\}$ là một chu trình riêng biệt, còn n phần tử còn lại hoán vị tạo thành $k-1$ chu trình, có $s(n, k-1)$ trường hợp.
- Loại 2 gồm các hoán vị có phần tử $\{n+1\}$ nằm trong các chu trình đã có của n phần tử đầu tiên, do có xét đến thứ tự nên phần tử này có n cách đặt vào dãy hoán vị đã có, như thế có $n \cdot s(n, k)$ cách.

Theo nguyên lý đếm bằng hai cách, ta có công thức đã cho. Một số kết quả cơ bản

$$s(n, 0) = 0, s(n, 1) = \frac{n(n-1)}{2},$$
$$s(n, n) = 1, s(n, n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

1.3. Số Stirling loại II

Số cách chia tập hợp n phần tử thành k tập hợp con, đặt là $S(n, k)$.

Công thức truy hồi $S(n+1, k) = S(n, k-1) + k \cdot S(n, k)$.

Chứng minh. Chứng minh công thức này tương tự trên, ta thực hiện bằng cách xét việc có xuất hiện hoặc không của tập con $\{n+1\}$ trong cách chia (chú ý rằng cách chia ở đây không tính thứ tự).

Một số kết quả cơ bản $S(n, n-1) = C_n^2$, $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

Số Stirling loại II này cũng liên quan đến bài toán về số hàm toàn ánh từ tập hợp có k phần tử sang tập hợp có k phần tử. $\square$

1.4. Các bài toán ứng dụng

Ví dụ 1. Cho bảng ô vuông (a_{ij}) với $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ và điền các số từ 1 đến n^2 theo thứ tự từ trái sang phải, từ trên xuống dưới. Người ta viết ghép các hàng của bảng này theo thứ tự từ trái sang phải được một dãy X . Tiếp tục ghép các cột của bảng này thành dạng hàng ngang cũng từ trái sang phải được dãy Y . Một phép biến đổi cho phép đổi chỗ hai số cho nhau. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu phép biến đổi để đưa X về Y ?

Hướng dẫn. Chú ý rằng để biến đổi các số trong hai chu trình khác nhau của một bộ k số, ta cần ít nhất $k-1$ cách. Do đó, ta xây dựng dãy X , Y trong trường hợp nhỏ và dự đoán số chu trình rời nhau, tính toán số phép biến đổi rồi tổng quát lên. $\square$

Ví dụ 2. Cho A là tập hợp tất cả các hoán vị $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2003})$ của 2003 số nguyên dương đầu tiên và một hoán vị thỏa mãn điều kiện: Không có tập con S nào của A mà $\{a_k \mid k \in S\} = S$.

Với mỗi $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2003}) \in A$, ta kí hiệu

$$d(a) = \sum_{k=1}^{2003} (a_k - k)^2.$$

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $d(a)$, gọi giá trị nhỏ nhất đó là d_0 .

2. Tìm tất cả các hoán vị $a \in A$ thỏa mãn $d(a) = d_0$.

Hướng dẫn. Điều kiện đề bài nói lên rằng hoán vị đã cho có đúng 1 chu trình, với mỗi hoán vị bất kỳ thuộc A , ta xét ánh xạ $f: i \rightarrow a_i$. Ta có:

$$\{1, f(1), f(f(1)), \dots, f^{2002}(1)\} = \{1, 2, 3, \dots, 2003\}.$$

Đặt $s_k = |f^{k-1}(1) - f^k(1)|$, $k = \overline{1, 2003}$ và $m < 2003$ là số tự nhiên thỏa mãn $f^m(1) = 2003$.

Ta có đánh giá

$$2003 = |f^m(1) - 1| \leq s_1 + s_2 + \dots + s_m + 1,$$

và

$$2003 = |f^m(1) - 1| \leq s_{m+1} + s_{m+2} + \dots + s_{2003} + 1.$$

Từ đây suy ra $\sum_{k=1}^{2003} s_k \geq 2 \cdot 2003 - 2$. Như thế

$$\begin{aligned} d(a) &= \sum_{k=1}^{2003} |f^{k-1}(1) - f^k(1)|^2 \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{2003} s_k\right)^2}{2003} \\ &\geq \frac{(2 \cdot 2003 - 2)^2}{2003} > 4 \cdot 2003 - 8. \end{aligned}$$

Do $d(a)$ là số chẵn nên $d(a) \geq 4 \cdot 2003 - 4 = 8006$. $\square$

Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách chia 15 đồ vật đôi một khác nhau cho 5 người, sao cho trong số đó có đúng 2 người không nhận được đồ vật nào?

Hướng dẫn. Sử dụng số Stirling loại II. Kết quả bài toán rõ ràng là $C_{15}^2 \cdot S(15, 3)$. $\square$

2. Phân hoạch nguyên

2.1. Phân hoạch nguyên

Việc phân chia một số nguyên dương n thành tổng của các số nguyên dương được gọi là phân hoạch nguyên của số nguyên dương đó.

2.2. Phân hoạch có tính thứ tự

Chẳng hạn, có tất cả 7 phân hoạch có thứ tự của 4 là

$$4 = 1+1+1+1 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 2+2 = 3+1 = 1+3.$$

Để đếm số phân hoạch này, ta sử dụng công thức truy hồi và nói chung bài toán đặt ra ở đây thường dễ tiếp cận.

Số phân hoạch của n thành 1, 2 cho bởi công thức

$$\begin{cases} S(1) = 1, S(2) = 2, \\ S(n) = S(n-1) + S(n-2), n > 2 \end{cases}$$

Công thức tính phân hoạch có thứ tự tổng quát của n là

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} S(i).$$

2.3. Phân hoạch không tính thứ tự (dạng này phổ biến hơn)

Đếm bằng hàm phân hoạch $p_k(n)$ là số cách phân hoạch n thành k thành phần.

Kí hiệu thêm $p(n)$ là số phân hoạch n thành một số thành phần tùy ý. Ta có $p(n) = \sum_{k=1}^n p_k(n)$. Ta kí hiệu $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k)$ với $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_k$ và $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_k = n$ là một phân hoạch của n . Ta dễ dàng tính được

$$p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(5) = 7, \dots$$

2.4. Biểu đồ Ferrers

Mỗi thành phần trong phân hoạch của một số nguyên dương bất kỳ có thể biểu diễn bằng các dấu chấm tạo thành một biểu đồ. Biểu đồ này được sắp xếp có chiều cao tăng dần từ trái qua phải hoặc chiều dài giảm dần từ trên xuống dưới.

Nếu chuyển biểu đồ từ ngang sang dọc, ta nhận được biểu đồ đối ngẫu của nó. Biểu đồ đối ngẫu với chính nó được gọi là biểu đồ tự đối ngẫu.

Liên quan đến công cụ đếm và chứng minh tính chất của phân hoạch nguyên, ta còn có Young Tableaux hay Durfee square cũng rất thú vị.

2.5. Các bài toán ứng dụng

Ví dụ 4. Gọi $S(n)$ là số cách phân hoạch có tính thứ tự của n thành các số 1, 3, 4. Chứng minh rằng $S(2n)$ là số chính phương.

Hướng dẫn. Ta tính được công thức truy hồi của $S(n)$ là

$$\begin{cases} S(1) = 1, S(2) = 1, S(3) = 2, S(4) = 4, \\ S(n) = S(n-1) + S(n-3) + S(n-4), n > 4 \end{cases}$$

Tính lần lượt các số hạng của dãy, ta thấy

$$S(2) = 1^2, S(4) = 2^2, S(6) = 3^2, S(8) = 5^2, \dots$$

Do đó, ta dự đoán và chứng minh $S(2n) = F_{n+1}^2$ (với F_n là số Fibonacci thứ n). $\square$

Ví dụ 5. Từ việc so sánh số phân hoạch của n thành các số 1, 2 chứng minh rằng

$$\sum_{\substack{0 \leq x, y \leq n, \\ x+2y=n}} C_{x+y}^x = F_{n+1}.$$

Hướng dẫn. Ta sử dụng phương pháp đếm bằng hai cách.

Trước hết, để tính số phân hoạch của n thành các số 1, 2 thì ta có công thức

$$\begin{cases} S(1) = 1, S(2) = 2, \\ S(n) = S(n-1) + S(n-2), n > 2 \end{cases}$$

$$\text{hay } S(n) = F_{n+1}.$$

Tiếp theo, ta xét số nghiệm của phương trình $x + 2y = n$. Mỗi nghiệm này sẽ có dạng

$$\left(\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_x, \underbrace{2, 2, 2, \dots, 2}_y \right).$$

Mỗi hoán vị của các bộ số này tạo thành một phân hoạch thỏa mãn đề bài. Ta tính được số hoán vị là $\frac{(x+y)!}{x!y!} = C_{x+y}^x$. So sánh hai kết quả, ta có điều phải chứng minh. $\square$

3. Định lý Beatty và mở rộng

3.1. Nội dung định lý

Nếu a, b là hai số vô tỉ dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ và xét các tập hợp $A = \{[ma], m = 1, 2, 3, \dots\}$, $B = \{[nb], n = 1, 2, 3, \dots\}$ thì $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}^*$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bổ đề qua 2 phần sau:

(1) Không tồn tại số nguyên dương nào xuất hiện ở cả hai tập hợp. Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại số nguyên dương k, m, n thỏa mãn $k = [ma] = [nb]$, khi đó

$$k < ma < k + 1, k < nb < k + 1$$

(do các số ma, nb là số vô tỉ). Do đó

$$\frac{k}{a} < m < \frac{k+1}{a}, \frac{k}{b} < n < \frac{k+1}{b},$$

cộng các bất đẳng thức này về theo về, ta được

$$k \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) < m + n < (k+1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

tương đương với

$$k < m + n < k + 1.$$

Điều này vô lý do $m + n$ là một số nguyên dương. Điều giả sử là sai nên (1) đúng.

(2) Mỗi số nguyên dương đều xuất hiện ở một trong hai tập hợp. Thật vậy, giả sử ngược lại, số nguyên dương k không xuất hiện ở cả hai tập hợp. Khi đó, tồn tại m, n sao cho

$$[ma] < k < [(m+1)a], [nb] < k < [(n+1)b],$$

suy ra $ma < k, k+1 < (m+1)a$ và $nb < k, k+1 < (n+1)b$. Do đó $m < \frac{k}{a}, n < \frac{k}{b}$, và

$$m+1 > \frac{k+1}{a}, n+1 > \frac{k+1}{b}.$$

cộng các bất đẳng thức này về theo về, ta được

$$m + n < k \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

$$(k+1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) < m + n + 2$$

tương đương với

$$m + n < k < m + n + 1.$$

Đây cũng là một điều vô lý nên ta thấy (2) đúng.

Do đó, bổ đề được chứng minh. $\square$

3.2. Tổng quát của định lý Beatty (định lý Lambek-Moser)

Xét hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ không giảm và không bị chặn. Với mọi hàm số $f^*: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f^*(x)) < n \leq f(f^*(n) + 1).$$

Khi đó $\{f(n) + n \mid n \in \mathbb{N}\}$ và $\{g(n) + n \mid n \in \mathbb{N}\}$ là phân hoạch của tập số nguyên dương. Chẳng hạn nếu xét $f(n) = n^2$ và $f^*(n) = [\sqrt{n-1}]$, thì hai dãy số tương ứng là

$$\{n^2 + n \mid n \in \mathbb{N}^*\}, \{[\sqrt{n-1}] + n \mid n \in \mathbb{N}^*\},$$

chính là phân hoạch của tập số nguyên dương.

3.3. Các bài toán ứng dụng

Ví dụ 6. Cho số nguyên dương k . Dãy số (x_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$ được xác định như sau:

(i) $x_1 = 1$.

(ii) Với mỗi số nguyên dương $n \geq 1$ thì x_{n+1} là số nguyên dương bé nhất không thuộc tập

$$\{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n; x_1 + k; x_2 + 2k; x_3 + 3k; x_n + nk\}$$

Chứng minh rằng tồn tại số thực a sao cho $x_n = [na]$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn. Xét đa thức $f(x) = x^2 + (k-2)x - k$ và gọi a là nghiệm dương của nó. Ta thấy $a \in (1, 2)$ và nó là số vô tỉ.

Đặt $b = a + k$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ nên theo định lý Beatty thì các giá trị của các hàm số

$$f(n) = [na], \quad g(n) = [nb] + kn \quad \text{tại } 1, 2, 3, \dots$$

tạo thành phân hoạch của $\mathbb{N}^*$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được $x_n = f(n)$. $\square$

Ví dụ 7. Xét dãy các số 3, 6, 7, 9, 10, 11, 12, ... là có thể biểu diễn thành tổng của ít nhất hai số nguyên dương liên tiếp. Gọi $f(n)$ là số hạng thứ n của dãy. Chứng minh rằng

$$f(n) = n + [\log_2(n + \log_2(n))].$$

Hướng dẫn. Chú ý rằng số non-polite thứ n chính là 2^{n-1} . Từ đó chứng minh bằng quy nạp biểu thức của dãy số trên. $\square$

4. Các định lý cơ bản về phân hoạch nguyên

Dưới đây, ta sẽ liệt kê và nêu ra các hướng chứng minh sơ lược cho các công thức tính hoặc đánh giá số phân hoạch nguyên.

(1) Với $n \geq k$ thì $p_k(n) = p_{k-1}(n) + p_k(n-k)$.

Chứng minh. Chia thành các trường hợp theo công thức truy hồi. $\square$

(2) Số phân hoạch của n thành đúng k phần bằng số phân hoạch của n mà phần tử lớn nhất là k .

Chứng minh. Sử dụng trực tiếp bổ đề Ferrers. $\square$

(3) Số phân hoạch của n thành k phần phân biệt bằng số phân hoạch của $n - \frac{k(k+1)}{2}$ thành không quá k phần.

Chứng minh. Xếp các thành phần của phân hoạch theo chiều tăng dần rồi trừ vào mỗi thành phần của phân hoạch lần lượt các số 1, 2, 3, ..., k . Để thấy tổng các số nhận được sẽ là $n - \frac{k(k+1)}{2}$ và có không quá k thành phần (thành phần cuối có thể bằng 0). $\square$

(4) Gọi $s(n)$ là số phân hoạch của n mà mỗi phần đều lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$s(n) = p(n) - p(n-1).$$

Chứng minh. Ta chia phân hoạch $p(n)$ thành hai loại là phân hoạch có thành phần nhỏ nhất lớn hơn 1 và phân hoạch có thành phần nhỏ nhất bằng 1, để thấy các số phân hoạch tương ứng là $s(n)$, $p(n-1)$. $\square$

(5) Với mọi n thì $p(n+2) + p(n) \geq 2p(n+1)$.

Chứng minh. Áp dụng (7) với chú ý rằng $s(n)$ tăng. Viết lại (8) thành

$$p(n+2) - p(n+1) \geq p(n+1) - p(n).$$

(6) Chứng minh rằng $p(2n) \geq p(n) + p(n-1) + \dots + p(2) + p(1)$.

Chứng minh. Chú ý rằng với mỗi phân hoạch có dạng $p(r)$ có thể được thêm bằng một số hạng $2n-r$ tạo thành phân hoạch của $2n$. $\square$

(7) Số phân hoạch của n thành các thành phần lẻ bằng số phân hoạch của n thành các thành phần phân biệt.

Chứng minh. Giả sử $1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + ka_k$ tương ứng với phân hoạch của n thành các số 1, 2, 3, ..., k trong đó $a_i \in \{0, 1\}$. Viết các số k thành dạng $2^t u$ với u , $t \in \mathbb{N}$ và t lẻ. Khi đó, ta có thể biểu diễn tổng trên thành dạng

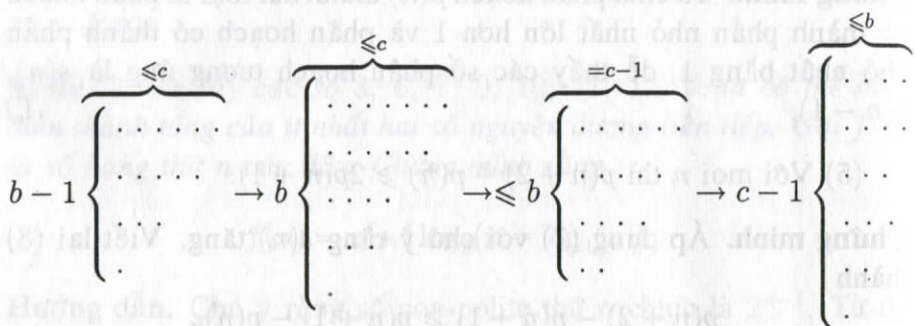
$$n = 1(2^0 a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_4 + \dots) + 3(2^0 a_3 + 2^1 a_6 + 2^2 a_{12} + \dots) + \dots$$

Do đó, số phân hoạch thành các thành phần phân biệt không vượt quá số phân hoạch thành các thành phần lẻ. Ta lại viết $n =$

$1a_1 + 3a_3 + 5a_5 + \dots$, ta viết $a_k = 2^{b_{k1}} + 2^{b_{k2}} + 2^{b_{k3}} + \dots$ thì $n = 1(2^{b_{11}} + 2^{b_{12}} + 2^{b_{13}} + \dots) + 3(2^{b_{31}} + 2^{b_{32}} + \dots) + \dots$. Các thành phần đều phân biệt nên suy ra số phân hoạch thành các thành phần phân biệt không nhỏ hơn số phân hoạch thành các thành phần lẻ. Từ đây suy ra điều phải chứng minh. $\square$

(8) Xét $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và $a > \max\{b, c\}$. Khi đó, số phân hoạch của $a - c$ thành đúng $b - 1$ phần không vượt quá c bằng số phân hoạch của $a - b$ thành đúng $c - 1$ phần không vượt quá b .

Chứng minh.



Ta chứng minh bằng cách dùng biểu đồ Ferrers, đầu tiên xét phân hoạch có $b - 1$ phần mà mỗi phần không quá c . Ta thêm một dòng có độ dài c vào biểu đồ, ta có phân hoạch thành b phần của $a - b + c$. Tiếp theo, ta xóa cột đầu tiên, được một phân hoạch không quá b phần của $a - c$, chuyển thành biểu đồ đối ngẫu, ta được phân hoạch có $c - 1$ phần mà mỗi phần không quá b . Dễ thấy các bước này cho thấy tương ứng 1 - 1 giữa các phân hoạch nên ta có đpcm. $\square$

(9) Số phân hoạch của n thành các thành phần 1, 2 là $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

(10) Số phân hoạch của n thành các thành phần 1, 2, 3 là số nguyên gần với giá trị $\frac{(n+3)^2}{12}$ nhất.

Chứng minh. Các phân hoạch này tương ứng với số nghiệm của các phương trình

$$x + 2y = n, \quad x + 2y + 3z = n.$$

Giải các phương trình Diophante này, ta thu được các đánh giá trên. $\square$

Hãy thử tự chứng minh tiếp các định lý sau:

(11) Số phân hoạch của n thành các phần chẵn bằng với số phân hoạch mà mỗi số được xuất hiện số chẵn lần.

(12) Số phân hoạch của n thành 3 phần bằng số phân hoạch của $2n$ thành 3 phần có giá trị bé hơn.

(13) Chứng minh rằng số phân hoạch có biểu đồ Ferrers tự đối ngẫu của bằng với số phân hoạch của n thành các thành phần lẻ phân biệt.

(14) Chứng minh rằng số phân hoạch của một số thành các phần với mỗi phần chẵn không vượt quá 1 bằng với số phân hoạch của một số với một phần xuất hiện không quá 3 lần.

(15) Số phân hoạch của n thành các thành phần giống nhau bằng với số ước của n .

5. Phân hoạch tập hợp

5.1. Bài toán chia kẹo Euler

Bên cạnh các bài toán về số Stirling thì bài toán chia kẹo Euler, liên quan đến số tổ hợp lặp hay đếm số multiset, là dạng toán khá cơ bản và quen thuộc.

Dạng 1: Số cách chia n viên kẹo cho k em bé mà em nào cũng phải có kẹo là C_{n-1}^{k-1} .

Thật vậy, ta xếp n viên kẹo đã cho lên một đường thẳng và tính số cách đặt $k - 1$ ngăn vào giữa $n - 1$ khoảng trống giữa hai viên kẹo để chia chúng ra thành k phần. Tổng cộng có C_{n-1}^{k-1} cách.

Dạng 2: Số cách chia n viên kẹo cho k em bé mà có thể có em không có kẹo là C_{n+k-1}^{k-1} .

Thật vậy, ta “mượn” thêm k viên kẹo và cho trước mỗi em bé, sau đó mới chia n viên kẹo cho chúng thì đưa về bài toán đếm số cách chia $n + k$ viên kẹo cho k em bé mà em nào cũng phải có kẹo. Tổng cộng có C_{n+k-1}^{k-1} cách.

5.2. Tổng hợp 12 dạng của phân hoạch tập hợp

Các bài toán về chia tập hợp hay có thể hình dung là phân chia đồ vật rất gần gũi trong đời sống nhưng trong nhiều trường hợp, ta thường rất dễ bị nhầm lẫn dẫn đến đếm thừa hoặc thiếu, thậm chí không biết phải tiếp cận theo phương pháp nào. Trong Toán học, người ta đã tổng hợp các vấn đề đó lại và phân thành 12 dạng với tên gọi nổi tiếng là "Twelvefold Way". Dưới đây, ta sẽ xét bài toán chung là: Xác định tất cả số cách cho n quả bóng vào k hộp.

Các kiểu phân hoạch được đặc trưng bằng một ánh xạ đi từ các quả bóng đến các hộp được liệt kê đầy đủ dưới đây, chú ý rằng:

- Ánh xạ bất kỳ: việc phân chia là tùy ý, không có ràng buộc gì (có thể một hộp có nhiều bóng mà cũng có thể có hộp không có quả bóng nào, nhưng tất nhiên là một quả bóng thì chỉ có thể chia vào một hộp).
- Đơn ánh: mỗi hộp chỉ chứa nhiều nhất một quả bóng.
- Toàn ánh: mỗi hộp chứa ít nhất một quả bóng. Ở đây không xét song ánh vì rõ ràng khi đó, mỗi hộp phải chứa đúng một quả bóng và bài toán không còn nhiều ý nghĩa nữa. Quy ước $C_b^a = 0$ với $b < a$.

Trường hợp 1. Các quả bóng đôi một khác nhau và các hộp đôi một khác nhau.

1. Ánh xạ bất kỳ: Mỗi quả bóng đều có thể được xếp vào một hộp tùy ý. Kết quả là k^n .
2. Đơn ánh: Nếu $n > k$ thì không có cách xếp thỏa mãn vì theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có 1 hộp chứa nhiều hơn 1 quả bóng, kết quả là 0. Nếu $n \leq k$, ta thấy quả bóng đầu tiên có thể đặt vào k hộp, quả bóng thứ hai có thể đặt vào $k-1$ hộp còn lại và cứ thế. Kết quả là $k(k-1)(k-2)\dots(k-n)$.
3. Toàn ánh: Vấn đề tương tự như việc phân hoạch tập hợp có n phần tử thành k tập con khác rỗng, tuy nhiên chú ý rằng cần quan tâm đến thứ tự của các tập con tương ứng. Kết quả là $k!S(n, k)$ với $S(n, k)$ là số Stirling loại II.

Trường hợp 2. Các quả bóng giống nhau và các hộp đôi một khác nhau.

1. Ánh xạ bất kỳ: Do các quả bóng là giống nhau nên ta chỉ xét có bao nhiêu quả được đưa vào mỗi hộp, tương ứng với bài toán chia kẹo Euler trong trường hợp không nhất thiết em nào cũng có kẹo. Kết quả là C_{n+k-1}^{k-1} .
2. Đơn ánh: Tương tự trên, nếu $n > k$ thì kết quả là 0. Nếu $n \leq k$ thì ta tính số cách chọn n hộp trong k hộp. Kết quả là C_k^n .
3. Toàn ánh: Số trường hợp tương ứng chính là bài toán chia kẹo Euler trong trường hợp em nào cũng phải có kẹo. Kết quả là C_{n-1}^{k-1} .

Trường hợp 3. Các quả bóng đôi một khác nhau và các hộp đều giống nhau.

1. Ánh xạ bất kỳ: Do các quả bóng là khác nhau nên ta có thể đánh số chúng bằng các số từ 1 đến n , dẫn đến bài toán phân hoạch tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ thành không quá k tập con. Kết quả là $S(n, 1) + S(n, 2) + \dots + S(n, k)$.
2. Đơn ánh: Tương tự trên, nếu $n > k$ thì kết quả là 0. Nếu $n \leq k$ thì rõ ràng chỉ có 1 cách xếp, kết quả là 1.
3. Toàn ánh: Hộp nào cũng phải có bóng nên nó đúng với bài toán tính số Stirling loại II. Kết quả là $S(n, k)$.

Trường hợp 4. Các quả bóng đều giống nhau và các hộp đều giống nhau.

1. Ánh xạ bất kỳ: Tương ứng với bài toán phân hoạch số n thành không quá k thành phần. Kết quả là $p_1(n) + p_2(n) + \dots + p_k(n)$.
2. Đơn ánh: Tương tự trên, nếu $n > k$ thì kết quả là 0. Nếu $n \leq k$ thì kết quả là 1.
3. Toàn ánh: Tương ứng với bài toán phân hoạch số n thành đúng k thành phần. Kết quả của bài toán là $p_k(n)$.

5.3. Các bài toán ứng dụng

Ví dụ 8. Xác định số nghiệm tự nhiên của các phương trình sau

(a) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{20} = 2013$ với $x_i \geq i, i = \overline{1, 20}$.

(b) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{51} = 2013$ với $x_i, i = \overline{1, 51}$ là các số lẻ.

(c) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{201} = 2013$ với $x_1 \leq 2, x_2 \leq 3$.

Hướng dẫn. Sử dụng công thức về bài toán chia kẹo Euler kết hợp với xử lý các điều kiện đi kèm. Chẳng hạn ở câu a, ta cần đặt $x_i = y_i + i$ để đưa về

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{20} = 1803, \text{ với } y_i \geq 0.$$

□

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC . Một điểm P nằm trong tam giác được gọi là điểm tốt nếu ta có thể tìm được đúng 27 tia chung gốc P cắt các cạnh của tam giác ABC và chia tam giác này thành 27 tam giác con có diện tích bằng nhau. Xác định số tất cả các điểm tốt của tam giác ABC .

Hướng dẫn. Trước hết ta thấy rằng PA, PB, PC phải là 3 trong 27 tia nêu trong đề bài. Giả sử $S_{ABC} = 27$ thì diện tích mỗi tam giác nhỏ đều bằng 1.

Đặt $S_{PBC} = x_1, S_{PCA} = x_2, S_{PAB} = x_3$ với $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^+$ và thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 27$. (*)

Ứng với một bộ (x_1, x_2, x_3) thỏa mãn điều kiện trên, ta có

$$S_{PBC}\overrightarrow{PA} + S_{PCA}\overrightarrow{PB} + S_{PAB}\overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

Nên tồn tại đúng một điểm P thỏa mãn đề bài. Suy ra ta cần đếm số nghiệm nguyên dương của phương trình (*). Đây lại là bài toán chia kẹo Euler quen thuộc, kết quả là $C_{26}^2 = 325$. □

6. Các bài toán chọn lọc khác

Bài 1. Chứng minh rằng nếu gọi $f(r, n)$ là số phân hoạch của n thành dạng $b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_s$ với $0 \leq i \leq s-1$ và $b_i > rb_{i+1}$, r là một số nguyên dương nào đó thì tồn tại một số nguyên dương n mà $f(r, n)$ khác số phân hoạch của n thành các phần từ một tập hợp các số nguyên dương bất kỳ, trừ khi $r = 1$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh định lý này bằng phản chứng.

Giả sử tồn tại số $r \geq 2$ sao cho có một tập hợp S_r các số nguyên dương và nếu gọi số phân hoạch của n thành các phần lấy từ tập hợp S_r là $g(r, n)$ thì $f(r, n) = g(r, n)$ với mọi n .

Ta có $f(r, 1) = 1$ nên $1 \in S_r$ vì nếu không thì $g(r, 1) = 0$. Tiếp theo $f(r, 2) = 1$ nên $2 \notin S_r$ vì nếu không thì $g(r, 2) = 2$.

Do $f(r, 3) = f(r, 4) = \dots = f(r, r+1) = 1$ nên ta có được $3, 4, 5, \dots, r+1 \notin S_r$.

Ta có $f(r, r+2) = 2$ do phân hoạch của $r+2$ thỏa mãn $b_i > r \cdot b_{i+1}$ là $r+2$ và $(r+1)+1$. Suy ra $r+2 \in S_r$ vì nếu không thì $g(r, r+2) = 1$.

Ta có bảng thể hiện các giá trị như sau

n	$f(n)$	$g(r, n)$ nếu $n \notin S_r$	$g(r, n)$ nếu $n \in S_r$	Kết luận
1	1	0	1	$1 \in S - r$
2	1	1	2	$2 \notin S - r$
3	1	1	2	$3 \notin S - r$
...	...	...	...	...
$r+1$	1	1	2	$r+1 \notin S - r$
$r+2$	2	1	2	$r+2 \notin S - r$
$r+3$	2	2	3	$r+3 \notin S - r$
...	...	...	...	...
$2r+1$	2	2	3	$2r+2 \notin S - r$
$2r+2$	3	2	3	$2r+3 \notin S - r$
$2r+3$	3	4	5	Mâu thuẫn

Tiếp theo, ta sẽ xác định giá trị nhỏ nhất của n để $f(r, n) = 3$. Điều này xảy ra khi n có dạng $n = b_0 + b_1 + 1$ với $b_0 > rb_1$ và $b_1 > r$ hoặc $n = b_0 + 2$ với $b_0 > 2r$.

Giá trị n trong trường hợp thứ nhất nhỏ nhất là $n = (r^2 + r + 1) + (r + 1) + 1 = r^2 + 2r + 3$ và trong trường hợp thứ hai là $n = (2r + 1) + 2 = 2r + 3$.

Do $2r + 3 < r^2 + 2r + 3$ với mọi r dương nên $n = 2r + 3$ là giá trị nhỏ nhất của n mà $f(r, n) = 3$. Trong trường hợp này, các phân hoạch của n là $2r + 3, (2r + 2) + 1, (2r + 1) + 2$.

Do chỉ có $1, r + 2 \in S_r$ nên dẫn đến có 2 phân hoạch của $2r + 3$ thành các phần chỉ có

$$(r + 2) + 1 + 1 + \dots + 1, \quad 1 + 1 + 1 + \dots + 1.$$

Suy ra ta cần có $2r + 3 \in S_r$ để có $g(r, 2r + 3) = 3$.

Tiếp theo, ta thấy $f(r, 2r + 4) = 3$ do các phân hoạch của $2r + 4$ mà $b_i > rb_{i+1}$ chỉ bao gồm $2r + 4, (2r + 3) + 1, (2r + 2) + 2$ (chú ý rằng $r \geq 2$).

Mặt khác, các phân hoạch của $2r + 4$ thành các phần trong tập hợp $\{1, r + 2, 2r + 3\}$ là

$$(2r + 3) + 1, (r + 2) + (r + 2), (r + 2) + 1 + 1 + \dots + 1, \quad 1 + 1 + 1 + \dots + 1,$$

nên $g(r, 2r + 3) = 4$ nếu $2r + 4 \notin S_r$ và $g(r, 2r + 3) = 5$ nếu $2r + 4 \in S_r$, mâu thuẫn.

Từ đây ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 2. Gọi $f(n), g(n)$ lần lượt là số phân hoạch của n thành số chẵn phần và số lẻ phần. Chứng minh rằng $f(n) - g(n) = (-1)^m$ nếu $n = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (3m \pm 1)$ và bằng $f(n) = g(n)$ nếu ngược lại (số có dạng $n = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (3m \pm 1)$ được gọi là pentagonal number).

Lời giải. Gọi $p_e(n), p_o(n)$ lần lượt là số phân hoạch của n thành số chẵn phần và số lẻ phần. Ta sẽ thiết lập một tương ứng 1 - 1 giữa $p_e(n)$ và $p_o(n)$ trong trường hợp $n \neq \frac{1}{2} \cdot m \cdot (3m \pm 1)$.

Giả sử phân hoạch $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ của n có thành phần nhỏ nhất là $s(\lambda) = \lambda_r$ và $\sigma(\lambda)$ là số các số nguyên dương liên tiếp giảm dần bắt đầu từ λ_1 .

Ta xét hai phân hoạch sau để hiểu rõ vấn đề: $\lambda = (7, 6, 4, 3, 2)$ và $\lambda = (8, 7, 6, 5)$. Ta xét các trường hợp.

- Nếu $s(\lambda) \leq \sigma(\lambda)$, ta thêm 1 vào mỗi phần trong $s(\lambda)$ thành phần lớn nhất của phân hoạch λ và bỏ đi thành phần nhỏ nhất. (Chẳng hạn $\lambda = (7, 6, 4, 3, 2) \rightarrow \lambda' = (8, 7, 4, 3)$).
- Nếu $s(\lambda) > \sigma(\lambda)$, ta trừ 1 vào mỗi phần của $\sigma(\lambda)$ phần lớn nhất của λ và thêm một thành phần nhỏ nhất có kích thước $\sigma(\lambda)$. (Chẳng hạn $\lambda = (8, 7, 4, 3) \rightarrow \lambda' = (7, 6, 4, 3, 2)$).

Các phép biến đổi trong hai trường hợp thay đổi tính chẵn lẻ của số phần của phân hoạch nên ta thấy rằng tồn tại một tương ứng 1 - 1 giữa $p_e(n)$ và $p_o(n)$.

Tuy nhiên, trường hợp 2 ở trên sẽ không còn đúng nếu như $\sigma(\lambda) = r, s(\lambda) = r + 1$ và giá trị của n khi đó là

$$n = (r + 1) + (r + 2) + \dots + 2r = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (3r + 1).$$

Còn nếu $\sigma(\lambda) = r, s(\lambda) = r$ thì

$$n = r + (r + 1) + \dots + (2r - 1) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (3r - 1),$$

nên tùy theo tính chẵn lẻ của r mà có sự chênh lệch giữa $p_e(n)$ và $p_o(n)$.

Vậy ta có

$$p_e(n) = \begin{cases} p_o(n) & \text{nếu } n \neq \frac{1}{2} \cdot r \cdot (3r \pm 1) \\ p_o(n) + (-1)^r & \text{nếu } n = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (3r \pm 1) \end{cases}$$

Chứng minh hoàn tất. $\square$

Bài 3. Gọi n là số nguyên dương sao cho $1, 2, 3, \dots, 3n$ có thể chia thành 3 tập hợp là

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \{b_1, b_2, \dots, b_n\}, \{c_1, c_2, \dots, c_n\},$$

sao cho $a_i + b_i = c_i, i = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng nếu n thỏa thì $3n + 1, 4n, 4n + 1$ cũng thỏa.

Lời giải. Giả sử với một số nguyên dương n nào đó, tồn tại một cách phân hoạch thỏa mãn đề bài, ta có

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i.$$

Suy ra tổng các số từ 1 đến $3n$ bằng $\frac{3n(3n+1)}{2}$ là số chẵn. Do đó $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$.

Với $n = 4$ và $n = 5$ ta có thể phân chia như bên dưới

$$n = 4 : \begin{cases} 5, 7, 12 \\ 3, 8, 11 \\ 1, 9, 10 \\ 2, 4, 6 \end{cases} \quad \text{và} \quad n = 5 : \begin{cases} 7, 8, 15 \\ 5, 9, 14 \\ 3, 10, 13 \\ 1, 11, 12 \end{cases}$$

Trường hợp $n = 8$ và $n = 9$, ta có thể phân chia như sau:

$$n = 8 : \begin{cases} 10, 14, 24 \\ 7, 16, 23 \\ 5, 17, 22 \\ 3, 18, 21 \\ 1, 19, 20 \\ 6, 9, 15 \\ 4, 8, 12 \\ 2, 11, 13 \end{cases} \quad \text{và} \quad n = 9 : \begin{cases} 11, 16, 27 \\ 7, 19, 26 \\ 5, 20, 25 \\ 3, 21, 24 \\ 1, 22, 23 \\ 8, 9, 17 \\ 6, 12, 18 \\ 4, 10, 14 \\ 2, 13, 15 \end{cases}$$

Từ đây ta có thể xây dựng cách phân chia cho trường hợp tổng quát.

Giả sử $n = k$ phân chia được, ta sẽ chứng minh $n = 4k, 4k + 1$ cũng phân chia được.

Với $n = 4k$, ta có các số $1, 2, 3, \dots, 12k$ ta chia như sau

$$\begin{cases} 6k - 1, 6k + 1, 12k \\ 6k - 3, 6k + 2, 12k - 1 \\ 6k - 5, 6k + 3, 12k - 2 \\ \dots \\ 1, 9n, 9n + 1 \end{cases}$$

Với $n = 4k + 1$, ta có các số $1, 2, 3, \dots, 12k + 2, 12k + 3$, ta chia như sau

$$\begin{cases} 6k + 1, 6k + 2, 12k + 3 \\ 6k - 1, 6k + 3, 12k + 2 \\ 6k - 3, 6k + 4, 12k + 1 \\ \dots \\ 1, 9k + 2, 9k + 3 \end{cases}$$

Trong cả hai trường hợp, ta còn dư lại các số chẵn $2, 4, 6, \dots, 6k$ (có thể phân hoạch được theo điều giả sử).

Tiếp theo, giả sử k phân hoạch được, ta xét cách phân hoạch cho tập $\{1, 2, 3, \dots, 3k + 1\}$ như sau:

$$a'_i = 3a_i - 1, b'_i = 3b_i, c'_i = 3c_i + 1, \quad \text{với } i = \overline{1, n}.$$

$$a'_{n+i} = 3a_i, b'_{n+i} = 3b_i + 1, c'_{n+i} = 3c_i - 1, \quad \text{với } i = \overline{1, n}.$$

$$a'_{2n+i} = 3a_i + 1, b'_{2n+i} = 3b_i - 1, c'_{2n+i} = 3c_i, \quad \text{với } i = \overline{1, n}.$$

Cuối cùng còn lại các số $1, 9k + 2$ và $9k + 3$. Dễ thấy phân hoạch này thỏa mãn đề bài.

Vậy nếu k thỏa mãn thì $3k + 1, 4k, 4k + 1$ cũng thỏa mãn. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 4. a) Hỏi có tồn tại cách phân hoạch tập hợp các số nguyên dương thành các tập con có 2 phần tử $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sao cho với mọi số nguyên dương n tổng các phần tử của A_n là $1391 + n$?

b) Hỏi có tồn tại cách phân hoạch tập hợp các số nguyên dương thành các tập con có 2 phần tử $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sao cho với mọi số nguyên dương n tổng các phần tử của A_n là $1391 + n^2$?

Lời giải (a). Câu trả lời là không thể (có thể thay 1391 bởi một số k bất kỳ).

Với mỗi n , tổng các phần tử của $A_1, A_2, \dots, A_n$ sẽ là $kn + \frac{n(n+1)}{2}$.

Hơn nữa, giá trị này phải nhỏ nhất là $\frac{2n(2n+1)}{2}$ (là tổng của $2n$ số nguyên dương phân biệt).

Suy ra $kn + \frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{2n(2n+1)}{2}$ với mọi n , điều này không đúng khi $n \rightarrow +\infty$.

(b) Câu trả lời là có, ta xây dựng như sau:

$$A_1 = \{1, 1391\},$$

$$A_{n+1} = \left\{ x, 1391 + (n+1)^2 - x : x = \min \left\{ \mathbb{N}^* \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right\} \right\}.$$

□

Bài 5. Chứng minh rằng có thể phân hoạch tập hợp các số tự nhiên thành 100 tập khác rỗng sao cho với bất kỳ 3 số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a + 99b = c$ thì hai trong số chúng thuộc cùng một tập hợp.

Lời giải. Với $i = 1, 2, 3, \dots, 99$, gọi A_i là tập hợp tất cả các số tự nhiên x thỏa mãn điều kiện $x \equiv 2(i-1) \pmod{198}$.

Tập hợp A_{100} chứa tất cả các số lẻ. Ta sẽ chứng minh rằng cách chia này thỏa mãn đề bài.

Nếu b là số chẵn thì $a \equiv c \pmod{198}$ hay a, c thuộc cùng một tập hợp.

Nếu b lẻ thì một trong hai số a, c cũng phải lẻ, suy ra chúng cùng thuộc A_{100} .

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 6. Chứng minh rằng tập các số tự nhiên có thể được tô bởi hai màu mà hai điều kiện dưới đây đều được thỏa mãn:

i) Với mỗi số nguyên tố p và mỗi số tự nhiên n thì các số p^n, p^{n+1} và p^{n+2} không được tô cùng màu.

ii) Không tồn tại một cấp số nhân vô hạn của các số tự nhiên có cùng màu.

Lời giải. Ta giả sử hai màu cần tô là A, B . Khi đó, xét 4 nhóm màu AAB, ABA, BBA, BAB và xét một dãy vô hạn S các màu này bằng cách đặt liên tiếp nhóm màu thứ nhất 1 lần, nhóm thứ hai 2 lần, nhóm thứ ba 3 lần, nhóm thứ tư 4 lần, quay ngược lại nhóm thứ nhất 5 lần, nhóm thứ hai 6 lần và cứ thế, cụ thể là

$$S = \underbrace{AAB}_{\times 1} \underbrace{ABAABA}_{\times 2} \underbrace{BBABBABBA}_{\times 3} \underbrace{BABBABBABBA}_{\times 4} \dots$$

Gọi $S(k)$ là màu thứ k trong dãy, tính từ trái sang (chẳng hạn $S(2) = A, S(5) = B$) và $C(k)$ là màu tô cho số tự nhiên k , tất nhiên $S(k), C(k) \in \{A, B\}$, $k \geq 1$. Khi đó, ta sẽ tô màu với quy tắc sau

Nếu số tự nhiên $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}$ thì

$$C(n) = S(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k).$$

Ta sẽ chứng minh quy tắc này thỏa mãn đề bài.

Điều kiện thứ nhất là dễ thấy do 3 màu liên tiếp trong S thì không đồng thời bằng nhau, còn điều kiện thứ hai thì chứng minh được bằng phản chứng. □

Bài 7. Ở một ngôi làng nọ, mỗi người hoặc luôn nói thật hoặc luôn nói dối. Xét 5 người trong làng đang đứng thành một hàng và một người khách đến thăm làng này hỏi mỗi người trong họ rằng có bao nhiêu người nói thật trong hàng. Mỗi người sẽ cho người khách một con số từ 0 đến 5. Hỏi có bao nhiêu multiset các câu trả lời mà người khách này có thể nhận được?

(Chú ý rằng multiset là tập hợp mà một phần tử có thể xuất hiện nhiều hơn 1 lần).

Lời giải. Trước hết, ta có bổ đề về số multi-sets: Số các multi-sets có n phần tử lấy từ một tập hợp có k phần tử là C_{n+k-1}^k .

Trở lại bài toán, ta sẽ chọn các bộ có dạng (a, b, c, d, e) trong đó $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq 5$ sao cho tồn tại một trường hợp trong thực tế thỏa mãn. Ta xét 6 trường hợp sau:

- (1) Nếu a, b, c, d, e đều là các số dương thì rõ ràng luôn tồn tại trường hợp như thế nếu tất cả 5 người đều nói dối. Số bộ như thế là $C_9^5 = 126$.

Nếu trong các số a, b, c, d, e mà có một số bằng 0 thì phải có một người nói thật.

- (2) Nếu $a = b = c = d = e = 0$ thì không có trường hợp nào thỏa.
- (3) Nếu $a = b = c = d = 0, e > 0$ thì chỉ có bộ $(0, 0, 0, 0, 1)$ thỏa với trường hợp 1 người nói thật, 4 người nói dối.
- (4) Nếu $a = b = c = 0, d, e > 0$ thì ta xét các trường hợp sau:

- Nếu có 1 người nói thật thì $d = 1, e \neq 1$, ta có 4 bộ như thế.
- Nếu có 2 người nói thật thì $d = e = 2$, có 1 bộ như thế.

Dễ thấy không thể có nhiều hơn 2 người nói thật. Do đó, có tất cả 5 bộ thỏa mãn đề bài.

- (5) Nếu $a = b = 0, c, d, e > 0$ thì ta cũng xét:

- Nếu có 1 người nói thật thì $c = 1, d, e \neq 1$ nên có tất cả $C_{2+4-1}^2 = 10$ bộ.
- Nếu có 2 người nói thật thì 2 trong các số $c, d, e = 2$ và số còn lại khác 2, có tất cả 4 bộ nhưng có 1 bộ trùng lại ở trên là $(0, 0, 2, 2, 1)$ nên chỉ xét 3 bộ.
- Nếu có 3 người nói thật thì $c = d = e = 3$ và có 1 bộ. Do đó, có tất cả $10 + 3 + 1 = 14$ bộ thỏa mãn.

- (6) Nếu $a = 0, b, c, d, e > 0$ thì:

- Nếu có 1 người nói thật thì $b = 1$ và $c, d, e \geq 2$, có $C_{3+4-1}^3 = 20$ bộ.

- Nếu có 2 người nói thật thì 2 trong 4 số b, c, d, e bằng 2 và 2 số còn lại khác 2.
 - Nếu hai số còn lại lớn hơn 2 thì ta có thể xét bộ $(0, 2, 2, d, e)$ với $d, e > 2$, có tất cả $C_{2+3-1}^2 = 6$ bộ.
 - Nếu trong hai số còn lại, có 1 số bằng 1 thì ta chỉ cần xét 1 bộ $(0, 2, 2, 1, 1)$ vì các bộ còn lại đã được đếm ở trên. Suy ra ở đây có $6 + 1 = 7$ bộ.
- Nếu có 3 người nói thật thì 3 số trong 4 số b, c, d, e bằng 3 và số còn lại khác 3.
 - Nếu số còn lại lớn hơn 3 thì ta xét bộ $(0, 3, 3, 3, e)$, có 2 bộ thỏa mãn.
 - Nếu số còn lại bé hơn 3 thì ta có 2 bộ $(0, 3, 3, 3, 1)$ và $(0, 3, 3, 3, 2)$ nhưng bộ $(0, 3, 3, 3, 1)$ đã được đếm rồi nên chỉ có 1 bộ thỏa.

Suy ra ở đây có $2 + 1 = 3$ bộ.

- Nếu có 4 người nói thật thì $b = c = d = e = 4$ và có 1 trường hợp.

Do đó, có tất cả $20 + 7 + 3 + 1 = 31$ bộ.

Vậy có tất cả $126 + 0 + 1 + 5 + 14 + 31 = 177$ bộ. $\square$

7. Bài tập áp dụng

7.1. Các bài toán có hướng dẫn giải

Bài 1. Chứng minh rằng tồn tại các phân hoạch của tập hợp số tự nhiên thành hai tập hợp A, B sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì số cách viết $n = x + y$ với $x, y \in A$ bằng với số cách viết $n = x + y$ với $x, y \in B$.

Bài 2. Có n đứa bé muốn chia m thanh kẹo thành n phần sao cho mỗi thanh được bẻ không quá 1 lần. Hỏi với các giá trị m, n thế nào thì có thể làm được điều này?

Bài 3.

1. Hỏi có thể chia tập hợp $\mathbb{N}$ thành các tập vô hạn A_i sao cho: với mọi i, j thì tồn tại số nguyên x_{ij} mà $A_j = \{n + x_{ij} | n \in A_i\}$?
2. Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên dương không thể phân hoạch thành các tập con S_a, S_b, S_c với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $S_x = \{[nx], n = 1, 2, 3, \dots\}$.

Bài 4. Phân hoạch tập hợp $M = \{1, 2, 3, \dots, 67\}$ thành 4 tập con. Chứng minh rằng tồn tại một tập con trong số đó chứa ba số a, b, c mà $c = a + b$ (a, b không nhất thiết phân biệt).

Bài 5.

1. Cho các phân hoạch của số nguyên dương n mà số các số lớn hơn hoặc bằng k bằng số lớn thứ k . Chứng minh rằng số phân hoạch như thế bằng số phân hoạch của n thành các thành phần lẻ phân biệt.
2. Cho số nguyên dương n . Tính số phân hoạch của n thành $n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$ sao cho

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_k \leq a_1 + 1.$$

Bài 6. Cho $n \geq 3$ và số nguyên tố p . Xét các số nguyên $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$. Chứng minh rằng $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là cấp số cộng khi và chỉ khi tồn tại một phân hoạch $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^n A_i$ sao cho $a_1 + A_1 = a_2 + A_2 = \dots = a_n + A_n$, trong đó $a + X = \{a + x | x \in X\}$.

Bài 7. Kí hiệu $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Gọi P, C là các phân hoạch không tính thứ tự của tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Gọi $c(C, P, x)$ là số hàm f từ tập hợp $[n]$ vào $[x]$ với

1. $f(a) = f(b)$ nếu a, b thuộc cùng về một phần của C .
2. $f(a) \neq f(b)$ nếu a, b thuộc cùng về một phần của P .

Chứng minh rằng tổng $\sum (-1)^{p-1} (p-1)! c(C, P, x)$ không phụ thuộc vào C , tổng tính trên tất cả các phân hoạch C với p kí hiệu số phần của phân hoạch P .

Bài 8.

- a) Cho tập hợp $M = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$. Tìm k nhỏ nhất sao cho có thể phân hoạch M thành k tập con $A_1, A_2, \dots, A_k$ mà không tồn tại $a, b, c \in A_i$ nào đó (với a, b, c không nhất thiết phân biệt) mà $a + b = c$.

- b) Chứng minh rằng có thể phân hoạch tập hợp

$$S = \left\{1, 2, 3, \dots, \frac{3^k - 1}{2}\right\}$$

thành k tập con rời nhau $A_1, A_2, \dots, A_k$ mà không tồn tại $a, b, c \in A_i$ nào đó (với a, b, c không nhất thiết phân biệt) mà $a + b = c$.

Bài 9. Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ được phân hoạch thành 3 tập con A, B, C có các số phần tử đều bằng n . Chứng minh rằng tồn tại $a \in A, b \in B, c \in C$ sao cho

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = 0.$$

Bài 10. Cho số nguyên dương $n > 1$. Xét phân hoạch tập hợp số nguyên dương thành k tập con $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$. Chứng minh rằng tồn tại $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sao cho tồn tại vô hạn đa thức bất khả quy $P(x)$ có bậc n và có các hệ số đôi một phân biệt thuộc tập hợp A_i .

Bài 11. Cho tập hợp $A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset$. Nếu bất kỳ số tự nhiên nào đủ lớn đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai phần tử của A hoặc bằng 2 lần một phần tử nào đó của A thì A được gọi là tập đầy đủ. Với mỗi số nguyên dương x , gọi $A(x)$ là tập hợp các phần tử nhỏ hơn x trong A .

Chứng minh rằng tồn tại tập đầy đủ A và một số cố định c sao cho với mọi $x \geq 1$ thì $|A(x)| \leq c\sqrt{x}$.

Bài 12. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho có thể phân hoạch tập hợp $\{1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1\}$ thành 12 tập con có tổng các phần tử đều bằng nhau.

Bài 13. Tồn tại hay không một phân hoạch của tập hợp các số $\mathbb{N}^*$ thành $A_1, A_2, \dots, A_n$ thỏa mãn

$$1. |A_i| = +\infty.$$

2. Với mọi $x, y, z, t \in A_i$ với các số $x - y, z - t$ thuộc cùng một tập khi và chỉ khi $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$.

7.2. Hướng dẫn giải

Bài 1 Xây dựng các tập hợp A, B theo quy tắc sau

- (1) $1 \in A$.
- (2) n và $2n - 1$ thuộc cùng một tập hợp.
- (3) n và $2n$ khác tập hợp.

Ta chứng minh được rằng A, B thỏa mãn bằng quy nạp.

Bài 2. Các số thỏa mãn là $m \geq n$ hoặc $n = 2m$ hoặc $\frac{m}{n} = \frac{k}{k+1}$.

Bài 3. Xét $A = \{2^{2n+1} | n \in \mathbb{N}\}$ và $A = \{2^{2n} | n \in \mathbb{N}\}$, M là tập hợp các số mà biểu diễn nhị phân chỉ gồm các số thuộc A và N là tập hợp các số mà biểu diễn nhị phân chỉ gồm các số thuộc B .

Đặt $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < \dots\}$ và $N = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$ và $A_i = \{n_i + m | m \in M\}$. Dễ thấy các tập hợp xây dựng theo cách này thỏa mãn đề bài.

Bài 4. Xét các bổ đề sau:

- (1) Đồ thị đầy đủ có 17 đỉnh được tô các cạnh bởi 3 màu thì tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng màu.
- (2) Đồ thị đầy đủ có 68 đỉnh được tô các cạnh bởi 4 màu thì tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng màu.

Trở lại bài toán, xét đồ thị 68 đỉnh thuộc $\{0, 1, 2, \dots, 67\}$ và có cạnh nối giữa x, y được tô màu của tập hợp chứa $|x - y|$.

Khi đó, đồ thị này được tô bởi 4 màu và theo bổ đề trên thì tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng màu. Do đó, tồn tại $x < y < z$ sao cho $y - x, z - y, z - x$ cùng màu.

Đặt $a = y - x, b = z - y, c = z - x$ thì a, b, c thuộc cùng một tập và $a + b = c$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. Sử dụng biểu đồ Ferrers và chú ý tính đối xứng qua đường chéo $y = x$.

Bài 6. Trước hết, ta chứng minh chiều thuận:

Giả sử (a_n) là một cấp số cộng công sai d , tức là

$$a_i = a_1 + (i - 1)d, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1.$$

Ta xét các tập hợp sau:

$$A_n = \{0, 1, \dots, d - 1, nd, \dots, nd + d - 1, 2nd, \dots, 2nd + d - 1, \dots\}$$

$$A_{n-1} = \{d, 2d - 1, nd + d, \dots, nd + 2d - 1, \dots\}$$

.....

$$A_1 = \{(n - 1)d, \dots, (n - 1)d + d - 1, nd + (n - 1)d, \dots, nd + (n - 1)d + d - 1, \dots\}$$

Bằng cách xây dựng này thì ta thấy $A_i \cap A_j = \emptyset$ và $\bigcup_{i=1}^n A_i = \mathbb{N}$.

Tiếp theo, để chứng minh chiều đảo, giả sử tồn tại các phân hoạch $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ của $\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Ta xét các bổ đề sau:

- (1) Gọi một cặp (A, B) với $A, B \subset \mathbb{N}$ là (a, b) - phủ nếu như $|A| = a, |B| = b$ và $|A + B| = \{0, 1, 2, \dots, ab - 1\}$ với $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$.

Đặt $m = \min(B \setminus \{0\})$ thì $m | a$ và tồn tại $\left(\frac{a}{m}, b\right)$ - phủ A', B' sao cho $A = mA' + \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$ và $B = mB'$ với $mX = \{mx | x \in X\}$.

Ta chứng minh được rằng với mọi $h = im + j$ với $i \geq 0, 0 \leq j \leq m - 1$ thì $h \in A \Leftrightarrow im \in A$ và $h \in B \Rightarrow j = 0$.

- (2) Nếu (A, B) là (a, b) - phủ với a là số nguyên tố thì A là một cấp số cộng.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo b .

Bài 7. Với $n = 1$ thì mệnh đề hiển nhiên đúng.

Cố định một hàm khác hằng f thỏa mãn (1), đóng góp của hàm này vào tổng ở trên trên tất cả các phân hoạch P thỏa mãn (2) là $(-1)^{p-1}(p-1)!$.

Ta sẽ chứng minh rằng đóng góp này bằng 0 với mọi hàm khác hằng f nên khẳng định đúng.

Xét một hàm khác hằng f và một phân hoạch P_- thỏa mãn (2) của $[n-1]$, ta sẽ tìm số cách để mở rộng phân hoạch này cho $[n]$. Ta có thể tạo thêm phần mới hoặc thêm n vào bất cứ phần nào không chứa k sao cho $f(k) = f(n)$. Gọi a là số các giá trị k thỏa mãn điều này, ta thấy a phải được chứa trong a phần khác nhau của phân hoạch P_- do điều kiện (2).

Do đó, có $p-a$ cách để mở rộng P_- và giữ lại số phần như cũ, một cách khác là mở rộng nó và tăng số phần lên. Mở rộng này thêm vào tổng đã cho một lượng là

$$(p-a)(-1)^{p-1}(p-1)! + (-1)^p p! = -a(-1)^{p-1}(p-1)!.$$

Do mỗi phân hoạch P của $[n]$ thỏa mãn (2) là một mở rộng của duy nhất phân hoạch P_- của $[n-1]$ thỏa (2) nên tất cả các đóng góp của các phân hoạch của $[n]$ thỏa mãn (2) bằng $-a$ lần tổng các đóng góp của các phân hoạch của $[n-1]$ thỏa mãn (2). Hơn nữa, f không phải hằng số trên $[n]$ và là hằng số trên $[n-1]$ nên $f(n)$ phải là một giá trị mới, do đó $a = 0$ hay tích nhận được luôn là 0.

Bài 8. a) Trước hết, ta chứng minh $k = 3$ không thỏa mãn. Giả sử $M = X \cup Y \cup Z$ với X, Y, Z là các tập rời nhau thỏa mãn điều kiện bài toán và có thể là tập rỗng. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|X| \geq |Y| \geq |Z|$, suy ra $|X| \geq 14$.

Đặt $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ với $m = |X|$, giả sử $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ thì dãy số sau chứa các số nguyên dương phân biệt thuộc M : $x_1, x_2, \dots, x_m, x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_m - x_1$.

Suy ra $2m - 1 \leq |M| = 40 \Rightarrow m \leq 20$.

Số cặp $(x, y) \in X \times Y$ là

$$|X||Y| \geq \frac{1}{2}|X|(40 - |X|) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (40 - m),$$

mà $14 \leq m \leq 20$ nên

$$|X||Y| \geq \min \left\{ \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot (40 - 14), \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (40 - 20) \right\} = 182.$$

Hơn nữa, tổng $x+y$ nhận 79 giá trị thuộc $[2; 80]$ và do $182 > 2 \cdot 79$ nên tồn tại ba cặp số $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ mà $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$.

Từ đây, chỉ ra sự mâu thuẫn về tính chất của các tập hợp X, Y, Z . Do đó $k \geq 4$. Ta chỉ cần xây dựng 4 tập hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán là xong.

b) Xét biểu diễn tam phân $m = (\overline{\dots a_2 a_1 a_0})_3$ và phân hoạch tập S theo quy tắc sau:

- Nếu $m = (\overline{\dots a_2 a_1 a_0})_3$ và $a_0 = 1$ thì $m \in A_0$.
- Nếu $m = (\overline{\dots a_2 a_1 a_0})_3$ và $a_0 \neq 0$ thì: tồn tại $l \geq 1$ sao cho $a_{l-1} \neq 0, a_l = 0$: chọn l nhỏ nhất thỏa mãn tính chất này và xếp $m \in A_l$.

Theo tính chất của hệ tam phân thì ta chứng minh được nếu $m_1, m_2 \in A_i$ thì $m_1 + m_2 \notin A_i$.

Hơn nữa, $m = \frac{1}{2}(3^k - 1) \in A_0$ và với $1 \leq m < \frac{1}{2}(3^k - 1)$ thì chắc chắn trong biểu diễn của m có ít nhất một chữ số 0 ở vị trí a_l với $l \leq k-1$ hay $m \in A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$, điều này có nghĩa là mọi $m \in S$ thì m thuộc một trong k tập hợp $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 9. Giả sử tồn tại cách phân hoạch S thành A, B, C mà không thỏa mãn đề bài. Giả sử $1 \in A$ và k là số nguyên dương sao cho $1, 2, 3, \dots, k-1 \in A$ và $k \notin A$. Giả sử $k \in B$ thì suy ra $2 \notin C$. Nếu $k > 2$ thì dễ thấy $2 \in A$.

Ta có nhận xét: nếu $x \in S, x \in C$ thì $x-1 \in A$.

Thật vậy, giả sử $x \in C, x-1 \notin A$ thì $x-1 \in B$ hoặc C . Ta xét các bộ ba:

- $(1, x-1, x)$ có $1 \in A, x \in C \Rightarrow x-1 \in C$.

- $(x - k, k, x)$ có $k \in B, x \in C \Rightarrow x - k \in B$ hoặc C .
- $(x - k, k - 1, x - 1)$ có $k - 1 \in A, x - 1 \in C \Rightarrow x - k \in C$.
- $(x - k - 1, k, x - 1)$ có $k \in B, x - 1 \in C \Rightarrow x - k - 1 \in C$.

Do $x, x - 1 \in C$ nên $x - k, x - k - 1 \in C$. Tương tự, ta cũng có $x - ik, x - ik - 1 \in C$. Ta chọn i thỏa mãn $x - ik - 1 < k$ hoặc $x - ik < k$ thì dẫn đến mâu thuẫn. Nhận xét được chứng minh. Tiếp theo, đặt $C = \{c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_n\}$ thì ta có $c_1 - 1, c_2 - 1, c_3 - 1, \dots, c_n - 1 \in A$.

Hơn nữa, $c_i > 2, i = \overline{1, n}$ nên $\{1, c_1 - 1, \dots, c_n - 1\} \subset A$ và $|A| > n$, mâu thuẫn.

Bài 10. Giả sử $a_i \in A_i$ với mọi $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Chọn p là số nguyên tố sao cho

$$p > \max \{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

Suy ra tồn tại i sao cho A_i chứa vô hạn số chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2 .

Xét $P(x) = a_i x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_0$ với $b_i \in A_i$ và $b_i = p c_i, (c_i, p) = 1$.

Theo tiêu chuẩn Eisenstein về đa thức bất khả quy thì đa thức $P(x)$ như trên bất khả quy. Do tồn tại vô số số b_i nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 11. Đặt $A = \{2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k} \mid 0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k, a_i - a_j \geq 2, \forall i \neq j\}$.

Ta chứng minh rằng với số nguyên dương N lớn hơn 1 bất kỳ thì N biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số thuộc A .

Xét biểu diễn $N = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_n}$ với $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Phân hoạch $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = U \cup V$ với U là tập hợp các số chẵn, V là tập hợp các số lẻ.

Khi đó $N = \sum_{u \in U} 2^u + \sum_{v \in V} 2^v$ và $\sum_{u \in U} 2^u, \sum_{v \in V} 2^v \in A$ (nếu một trong hai tập hợp U, V rỗng thì ta chia đôi tập hợp còn lại).

Tiếp theo, với x bất kỳ, ta xét $n \in \mathbb{N}^*$ mà $2^{2n-2} \leq x < 2^{2n}$, suy ra $A(x) \leq A(2^{2n})$.

Hơn nữa, $A(2^{2n})$ chính là số cách chọn $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$ cùng tính chẵn lẻ và bất đẳng thức $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k} \leq 2^{2n}$. Suy ra $A(2^{2n}) \leq 2^{n+1}$.

Do đó, $A(x) \leq A(2^{2n}) < 2^{n+1} = 4 \cdot 2^{n-1} \leq 4\sqrt{x}$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 12. Trước hết, dễ thấy điều kiện cần là $(1+3+5+\dots+2n-1) = n^2 \geq 12$ hay $n \geq 6$.

Đặt $n = 6k$ thì ta cần phải có $\frac{n^2}{12} \geq 2n - 1$ hay $3k^2 \geq 12 - 1$ nên $k \geq 4$.

Ta chứng minh được rằng nếu $6k$ thỏa mãn thì $6(k+4)$ cũng thỏa mãn, từ đó, chỉ cần xét các trường hợp nhỏ của k để đi đến kết luận.

Bài 13. Chứng minh rằng phân hoạch sau $A_k = \{x \mid x = 2^t(2k-1)\}$ thỏa mãn đề bài.

7.3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Cho n là số nguyên dương lớn hơn 1. Hai người chơi A và B chơi một trò chơi bằng việc xây dựng các phân hoạch của n dưới dạng

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k \text{ và } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_k \geq 1$$

A thắng nếu như có số lẻ phần trong phân hoạch (tức là k là số lẻ) và ngược lại thì B thắng. Các số $a_1, a_2, \dots, a_k$ được chọn như sau: A bắt đầu chọn một số a_1 là một trong các số từ 1 đến $n-1$. B chọn một số a_2 trong các số từ 1 đến a_1 sao cho $a_1 + a_2 \leq n$. A tiếp tục chọn một số a_3 giữa các số từ 1 đến a_2 sao cho $a_1 + a_2 + a_3 \leq n$ và cứ thế đến khi nào xây dựng hoàn tất phân hoạch. Hãy xác định xem với mỗi giá trị $n > 1$ thì ai có chiến thuật để chiến thắng.

Bài tập 2. Hai đội cùng chơi trò nhặt bóng: Đội xanh nhặt bóng xanh và đội đỏ nhặt bóng đỏ. Quy tắc nhặt bóng như sau:

- Cầu thủ số 1 của đội xanh sẽ chỉ nhặt một số bóng chia hết cho 5.
- Cầu thủ số 2 của đội xanh sẽ chỉ nhặt một số bóng nhỏ hơn hoặc bằng 9.
- Cầu thủ số 3 của đội xanh sẽ luôn phải nhặt một số bóng chẵn.
- Cầu thủ số 4 của đội xanh sẽ nhặt 1 quả.
- Cầu thủ số 1 của đội đỏ sẽ luôn nhặt một số bóng tùy ý.
- Cầu thủ số 2 của đội đỏ sẽ luôn nhặt một số bóng tùy ý.
- Cầu thủ số 3 của đội đỏ sẽ hoặc là nhặt 5 quả.

Quy tắc chơi như sau: Mỗi đội được chia cho một số rất nhiều các giỏ bóng, mỗi giỏ có 20 quả. Tại mỗi vòng đấu, các cầu thủ của mỗi đội sẽ thực hiện động tác nhặt bóng 1 lần hoặc không thực hiện, sao cho cả đội nhặt đúng 20 quả bóng. Điều kiện là bộ các động tác của các cầu thủ không được lặp lại giữa các vòng đấu. Khi nào không còn cách nhặt nào nữa thì dừng lại. Hỏi trong hai đội, đội nào sẽ phải dừng lại trước?

Bài tập 3. Một người có 210 viên sỏi, chia làm một số đồng sỏi. Sau đó anh ta nhặt từ mỗi đồng ra một viên và tạo thành một đồng sỏi mới. Chứng minh rằng nếu anh ta lặp lại mãi quá trình này thì sẽ đến lúc anh ta có các đồng sỏi với số lượng là đôi một khác nhau. Hãy tổng quát bài toán với các số n thích hợp.

Bài tập 4. Giả sử tập hợp các số nguyên dương được phân hoạch thành n cấp số cộng có công sai lần lượt là $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$. Chứng minh rằng tồn tại $i \neq j$ sao cho $d_i = d_j$.

Bài tập 5. Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên dương có thể phân hoạch thành hai tập hợp A, B sao cho A không chứa cấp số cộng nào có độ dài là 3 và B không chứa cấp số cộng nào có độ dài vô hạn.

Bài tập 6. Xác định số nguyên dương k lớn nhất thỏa mãn tính chất sau: Tập hợp các số dương có thể được phân hoạch thành k tập con $A_1, A_2, \dots, A_k$ sao cho với mọi số nguyên dương $n \geq 15$ và mọi $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ thì tồn tại 2 phần tử phân biệt của A_i mà tổng của chúng đúng bằng n .

Bài tập 7. Với mỗi phân hoạch nguyên của số nguyên dương n , ta gọi $A(n)$ là số các số 1 xuất hiện trong phân hoạch và $B(n)$ là số các số khác nhau xuất hiện trong phân hoạch.

Chứng minh rằng $\sum A(n) = \sum B(n)$, tổng lấy trên tất cả các phân hoạch.

Bài tập 8. Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho các hệ số của $f(x)$ đều nguyên dương và $\deg f > 0$. Với mọi số nguyên dương n , kí hiệu $S(n) = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho $S(n)$ có thể phân hoạch thành 10 tập con mà tổng các phần tử của mỗi tập con ấy bằng nhau.

Bài tập 9. Trên bàn có 10 quả bóng và 11 cái hộp đánh số từ 1 đến 11.

1. Hỏi có bao nhiêu cách cho 10 quả bóng vào 11 cái hộp?
2. Có bao nhiêu cách cho bóng vào hộp sao cho với mọi $1 \leq k \leq 10$ thì ta luôn có ít nhất k quả bóng trong k hộp đầu tiên?
3. Có bao nhiêu cách cho bóng vào hộp sao cho có k cái hộp không thỏa mãn điều kiện b với $1 \leq k \leq 10$?

Bài tập 10. Tìm số phân hoạch của n thành các phần (x, y, z) thỏa mãn tổng của hai phần bất kỳ không nhỏ hơn phần còn lại.

Bài tập 11. Cho $(u_n), (v_n)$ là hai dãy số tự nhiên thỏa mãn các điều kiện:

1. $u_1 = 1$.
2. $v_n = an - 1 - u_n$ với a là số tự nhiên cho trước.
3. u_{n+1} là số nguyên dương nhỏ nhất khác các số $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Tính u_{2013} .

Bài tập 12. Gọi S_n là các phân hoạch của n mà mỗi thành phần đều lớn hơn 1. Các phân hoạch có dạng $(x_1, x_2, \dots, x_k), (y_1, y_2, \dots, y_l) \in S_n$ là bạn bè nếu $\prod_{i=1}^k (x_i + 1) = \prod_{i=1}^l (y_i + 1)$. Gọi $S'(n)$ là tập con của tập $S(n)$ mà không chứa bất cứ cặp phân hoạch bạn bè nào. Chứng minh rằng $|S'(n)| \geq \sqrt{n}$.

Bài tập 13. Với mỗi số nguyên dương n , ta gọi dãy các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ là n -tốt nếu như $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = n, a_1 = a_k = 1$ và $|a_i - a_{i+1}| \leq 1, i = 1, 2, 3, \dots, k-1$. Tính giá trị nhỏ nhất của k theo n .

Tài liệu tham khảo

- [1] Phan Thị Hà Dương, Bài giảng IMO 2010, năm 2010.
- [2] Vũ Văn Tân, Tuyển tập các bài toán thi Olympic, năm 2006.
- [3] Miklos Bona, *Introduction to Enumerative combinatorics*, 2007.
- [4] <http://mathoverflow.net/>
- [5] <http://mathlinks.ro/>
- [6] <http://en.wikipedia.org/>
- [7] <http://mathscope.org>

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN QUỐC GIA NĂM 2013

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} = \sqrt{\frac{20y}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x \neq \frac{k\pi}{2}, y \neq \frac{m\pi}{2} (k, m \in \mathbb{Z})$ và $xy > 0$. Nhân theo vế hai phương trình của hệ, ta thu được:

$$A = 20 \sqrt{\frac{xy}{(x+y)^2}},$$

$$\text{trong đó } A = \left(\sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} \right) \times \left(\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} \right).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) &\geq \left(|\sin x \cos x| + \frac{1}{|\sin x \cos x|} \right)^2 \\ &= \left(\frac{|\sin 2x|}{2} + \frac{1}{2|\sin 2x|} + \frac{3}{2|\sin 2x|} \right)^2 \\ &\geq \left(1 + \frac{3}{2} \right)^2 = \left(\frac{5}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y} \right) \left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y} \right) \geq \left(\frac{5}{2} \right)^2.$$

Do đó, theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned} A &\geq 4\sqrt[4]{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}\right)} \\ &\geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{5}{2}\right)^4} = 10 \geq 20\sqrt{\frac{xy}{(x+y)^2}}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|\sin 2x| = 1$ và $x = y$, tức $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Thử lại, ta thấy rằng khi $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ thì $\sin^2 x = \cos^2 x = \sin^2 y = \cos^2 y = \frac{1}{2}$ và $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2}$. Khi đó cả hai vế của mỗi phương trình trong hệ đã cho đều bằng $\sqrt{10}$. Vậy $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ là tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho. $\square$

Nhận xét. Đây là bài toán dễ nhất và cũng là bài toán... dễ nhất của kỳ thi. Dễ vì ý tưởng dùng bất đẳng thức là quá rõ ràng, còn dễ là vì việc trộn lẫn giữa các biểu thức lượng giác và biểu thức đại số đã làm cho bài toán trở nên xấu xí và thiếu tự nhiên. Ngoài các đánh giá đã nêu trong hai lời giải trên còn có thể dùng nhiều cách khác, có thể đặt thêm ẩn phụ để dễ biến đổi hơn.

Ý tưởng dùng bất đẳng thức trong giải phương trình là không mới và gần đây nhất đã được sử dụng trong kỳ VMO 2009: *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2x)} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Sự lặp lại trong các đề thi VMO của chúng ta có thể nói đã trở thành hệ thống. Có thể đơn cử một số ví dụ trong lĩnh vực hệ phương trình để minh chứng cho luận điểm này:

(1) (VMO, 1996) *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

(2) (VMO, 2007) *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{12}{3x+y}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 - \frac{12}{3x+y}\right)\sqrt{y} = 6 \end{cases}$$

(3) (VMO, 2004) *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

(4) (VMO, 2010) *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$$

(5) (VMO, 1994) *Giải hệ phương trình sau trên tập các số thực:*

$$\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$$

(6) (VMO, 2006) *Giải hệ phương trình sau trên tập các số thực:*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 6} \cdot \log_3(6 - y) = x \\ \sqrt{y^2 - 2y + 6} \cdot \log_3(6 - z) = y \\ \sqrt{z^2 - 2z + 6} \cdot \log_3(6 - x) = z \end{cases}$$

Sự lặp lại này cho thấy những sáng tạo, những ý tưởng mới gần đây đã thiếu vắng rất nhiều, thay vào đó là những bài toán “cho đủ đội hình”. Để thoát khỏi tình trạng này, rất cần phải có sự đầu tư mạnh mẽ cho công tác xây dựng nguồn đề đề xuất, mà giải pháp khả thi nhất là mạnh dạn sử dụng sự đóng góp của các bạn trẻ là cựu VMO, cựu IMO như kinh nghiệm của các nước có phong trào Olympic Toán mạnh như Nga, Mỹ, Romania...

Cuối cùng, cũng cần nói thêm là bài toán này tuy dễ nhưng cũng có thể làm nhiều bạn mất điểm ở khâu trình bày. Điều kiện xác định ở đầu

bài toán và thử lại trước khi kết luận là những phần không thể thiếu. Nhiều thành viên trong đội tuyển thi IMO 2012 đã quên trình bày phần thử lại đầy đủ và mất đi 1 điểm ở bài 4 (phương trình hàm), đây là một điều đáng tiếc và là bài học quý giá cho các học sinh chuyên Toán, dù giải được bài nhưng thể hiện lời giải cũng phải thật cẩn thận.

Bài 2. Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 3 - \frac{a_n + 2}{2^{a_n}}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

Lời giải. Trước hết, bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh:

$$a_n > 1, \quad \forall n > 1. \quad (*)$$

Thật vậy, với $n = 2$, ta có $u_2 = \frac{3}{2}$ nên $(*)$ đúng. Giả sử $(*)$ đúng với $n = k > 1$, tức là $a_k > 1$, ta cần chứng minh $a_{k+1} = 3 - \frac{a_k + 2}{2^{a_k}} > 1$, hay:

$$2^{a_k+1} > a_k + 2.$$

Xét hàm số $u(x) = 2^{x+1} - x - 2$ trên $(1, +\infty)$. Ta có

$$u'(x) = 2^{x+1} \ln 2 - 1 > 0, \quad \forall x > 1.$$

Do đó $u(x)$ là hàm đồng biến, suy ra $u(a_k) > u(1) > 0$. Từ đó suy ra $(*)$ đúng với mọi $n > 1$.

Bây giờ, do $a_n \geq 1$ với mọi $n \geq 1$ nên:

$$a_{n+1} = 3 - \frac{a_n + 2}{2^{a_n}} < 3, \quad \forall n \geq 1.$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh (a_n) là dãy tăng. Xét hàm số $f(x) = 3 - \frac{2+x}{2^x}$ với $1 < x < 3$. Ta có

$$f'(x) = \frac{\ln 4 + x \ln 2 - 1}{2^x} > 0,$$

nên $f(x)$ đồng biến trên $(1, 3)$. Ta cũng có $a_2 = \frac{3}{2} > a_1$ nên dãy tăng. Do đó, dãy (a_n) đã cho tăng và bị chặn trên bởi 3 nên có

giới hạn hữu hạn. Giả sử giới hạn đó là $L \in (1, 3)$. Trong công thức xác định của dãy, chuyển qua giới hạn, ta có $L = 3 - \frac{L+2}{2^L}$. Ta sẽ chứng minh phương trình:

$$x = 3 - \frac{x+2}{2^x} \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất trên $(1, 3)$. Thật vậy, xét hàm số $g(x) = 3 - \frac{x+2}{2^x} - x$ với $x \in (1, 3)$, ta có

$$g'(x) = \frac{\ln 4 + x \ln 2 - 1}{2^x} - 1 = \frac{\ln 4 + x \ln 2 - 1 - 2^x}{2^x},$$

Ta xét tiếp hàm số $h(x) = \ln 4 + x \ln 2 - 1 - 2^x$, $x \in (1, 3)$ thì:

$$h'(x) = \ln 2(1 - 2^x) < 0, \quad \forall x \in (1, 3),$$

nên đây là hàm nghịch biến. Suy ra $h(x) < h(1) = \ln 8 - 3 < 0$, hay $\ln 4 + x \ln 2 - 1 - 2^x < 0$ với mọi $x \in (1, 3)$. Do đó, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(1, 3)$ và phương trình $g(x) = 0$ có không quá một nghiệm. Hơn nữa, ta có $g(2) = 0$ nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1). Vì vậy dãy số đã cho có giới hạn là 2. $\square$

Nhận xét. Ngoài cách đánh giá chặn miền giá trị của dãy thuộc $(1, 3)$ như trên, ta cũng có nhiều cách đánh giá khác chặt hơn giúp quá trình quy nạp thuận tiện hơn.

Bài này cũng khá cơ bản và quen thuộc. Bài toán khảo sát sự hội tụ của dãy số dạng $a_{n+1} = f(a_n)$ đã trở thành giáo khoa, đặc biệt là khi f là hàm tăng. Vấn đề chứng minh dãy bị chặn cũng không có khó khăn vì chỉ cần chứng minh được $a_n > 1$ thì hiển nhiên ta có $a_n < 3$. Cuối cùng, việc giải phương trình $x = f(x)$ gây đôi chút khó khăn đối với một số bạn, đặc biệt là các bạn học lớp 11 (và lớp 10 - năm nay có một số bạn lớp 10 tham gia kỳ thi).

Bổ sung thêm cho ý kiến về sự lặp lại trong các đề thi VMO, chúng tôi tiếp tục đưa ra một số bài toán có hình thức và cách tiếp cận tương tự bài VMO năm nay đã được sử dụng trong các kỳ VMO trước đây:

(1) (VMO, 1998) Cho $a \geq 1$ là số thực. Đặt:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = 1 + \ln \left(\frac{x_n^2}{1 + \ln x_n} \right), \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(2) (VMO, 2008) Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi $x_1 = 0, x_2 = 2$ và:

$$x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng và tìm giới hạn đó.

Ở đây chúng tôi chỉ nêu hai bài toán có dạng và cả cách giải rất giống với bài năm nay, vì các bài dãy số các năm 2000, 2001, 2005 cũng có dạng dãy số $x_{n+1} = f(x_n)$ nhưng đều có những nét thú vị riêng do khai thác được những ý hay.

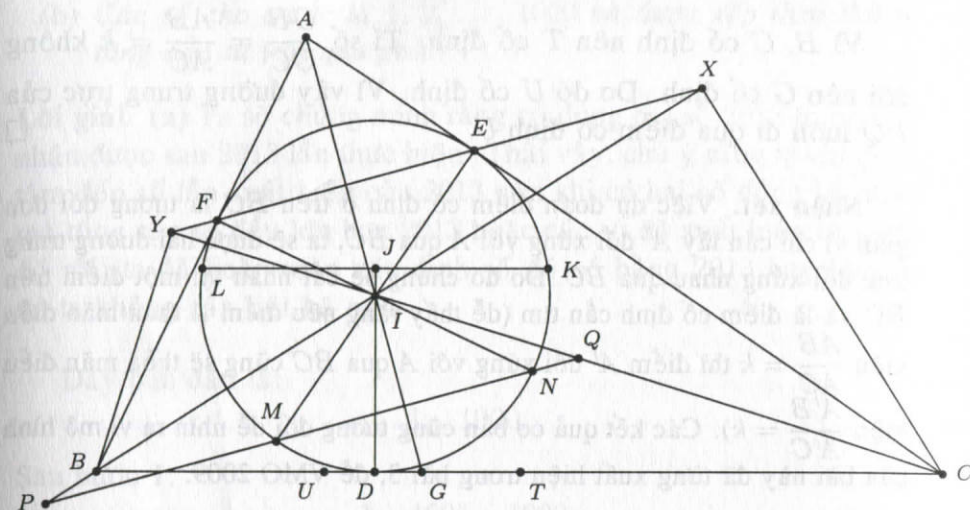
Bài 3. Cho tam giác không cân ABC . Ký hiệu (I) là đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB . Đường thẳng đi qua E và vuông góc với BI cắt (I) tại K ($K \neq E$), đường thẳng đi qua F và vuông góc với CI cắt (I) tại L ($L \neq F$). Gọi J là trung điểm của KL .

(a) Chứng minh rằng D, I, J thẳng hàng.

(b) Giả sử các đỉnh B và C cố định, đỉnh A thay đổi sao cho tỉ số $\frac{AB}{AC} = k$ (k không đổi). Gọi M, N tương ứng là các giao điểm IE, IF với (I) ($M \neq E, N \neq F$). MN cắt IB, IC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. (a) Do D, E lần lượt là các tiếp điểm của (I) với các cạnh BC, CA nên ta có $DE \perp CI$. Theo giả thiết thì $FL \perp CI$ nên suy ra $DE \parallel FL$. Hoàn toàn tương tự, ta có $DF \parallel EK$.

Từ các cung bằng nhau trong đường tròn, ta có $DK = DL = EF$ hay D nằm trên đường trung trực của KL . Hơn nữa, I cũng nằm trên đường trung trực của KL nên suy ra D, I, J thẳng hàng.



(b) Gọi T là trung điểm BC , G là giao điểm của AI với BC , U là điểm đối xứng với T qua G . Ta sẽ chứng minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua U . Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của EF với BI và CI . Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{XIC} &= 180^\circ - \widehat{BIC} = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} \right) = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} \\ &= \widehat{AEI} - \widehat{EFI} = \widehat{AEF} = \widehat{XEC}. \end{aligned}$$

Do đó C, I, E, X đồng viên, suy ra $\widehat{BXC} = 90^\circ$. Tương tự, ta suy ra $\widehat{BYC} = 90^\circ$.

Vì $\widehat{BXC} = \widehat{BYC} = 90^\circ$ nên bốn điểm B, C, X, Y nằm trên đường tròn tâm T , đường kính BC . Suy ra T nằm trên đường trung trực của XY .

Để thấy rằng các cặp điểm M, E và N, F đối xứng nhau qua I nên $EF \parallel MN$ hay $XY \parallel PQ$. Từ đó, ta có $\triangle IEX = \triangle IMP$, suy ra X và P đối xứng với nhau qua I . Tương tự, ta cũng có Y và Q đối xứng nhau qua I . Do đó hai đường trung trực của XY và PQ đối xứng với nhau qua AI . Từ đây suy ra đường trung trực của PQ đi qua U .

Vì B, C cố định nên T cố định. Tỉ số $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC} = k$ không đổi nên G cố định. Do đó U cố định. Vì vậy đường trung trực của PQ luôn đi qua điểm cố định U . $\square$

Nhận xét. Việc dự đoán điểm cố định ở trên BC là tương đối đơn giản vì chỉ cần lấy A' đối xứng với A qua BC , ta sẽ được hai đường trung trực đối xứng nhau qua BC . Do đó chúng sẽ cắt nhau tại một điểm trên BC và là điểm cố định cần tìm (dễ thấy rằng nếu điểm A thỏa mãn điều kiện $\frac{AB}{AC} = k$ thì điểm A' đối xứng với A qua BC cũng sẽ thỏa mãn điều kiện $\frac{A'B}{A'C} = k$). Các kết quả cơ bản cũng tương đối dễ nhìn ra vì mô hình của bài này đã từng xuất hiện trong bài 3, đề VMO 2009.

Tuy vậy, cái mới và chính là cái khó của bài toán này nằm ở chỗ: Việc xác định M, N là phép đối xứng tâm I , nhưng để giải bài toán ta cần chuyển qua phép đối xứng trục AI . Điều này đòi hỏi học sinh phải nắm vững tính chất của phép biến hình mới có thể lập luận nhanh chóng được, nếu không học sinh có thể dùng một số biến đổi góc, tính toán đại số cũng có thể giải quyết được bài toán nhưng khá vất vả. Một khó khăn khác của bài này chính là khó vẽ được hình chính xác do các vị trí điểm khá gần nhau, không rõ ràng dẫn đến tính trực quan bị mất đi, nhiều khi dẫn đến ngộ nhận. Do đó, bài toán này đòi hỏi nhiều ở khả năng phán đoán của thí sinh.

Giả thiết $\frac{AB}{AC}$ không đổi chỉ là để suy ra chân đường phân giác cố định nhưng vô tình làm một số học sinh nghĩ đến đường tròn Apollonius. Việc chỉ ra điểm cố định dựa theo tỉ số chia đoạn BC là có thể làm được nhưng cũng tương đối không đơn giản.

Bài 4. Cho trước một số số tự nhiên được viết trên một đường thẳng. Ta thực hiện các bước điền số lên đường thẳng như sau: tại mỗi bước, xác định tất cả các cặp số kề nhau hiện có trên đường thẳng theo thứ tự từ trái qua phải, sau đó điền vào giữa mỗi cặp một số bằng tổng của hai số thuộc cặp đó. Hỏi sau 2013 bước, số 2013 xuất hiện bao nhiêu lần trên đường thẳng trong các trường hợp sau:

(a) Các số cho trước là 1 và 1000?

(b) Các số cho trước là 1, 2, ..., 1000 và được xếp theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải?

Lời giải. (a) Ta sẽ chứng minh rằng có đúng hai số 2013 trong dãy nhận được sau 2013 lần thực hiện. Thật vậy, chú ý rằng ta chỉ quan tâm đến số lần xuất hiện của 2013 nên khi có hai số đứng kề nhau mà tổng các số đều lớn hơn 2013 hoặc các số đã xuất hiện từ trước đó rồi (ta đã hoàn toàn xác định số đó có bằng 2013 hay không) thì ta không cần liệt kê nữa.

Dãy ban đầu là:

1, 1000.

Sau bước 1:

1, 1001, 1000.

Sau bước 2:

1, 1002, 1001, 2001, 1000.

Sau bước 3:

1, 1003, 1002, 2003, 1001, 3002, 2001, 3001, 1000.

Tiếp theo, ta chỉ giữ lại 4 số đầu tiên. Sau bước 4:

1, 1004, 1003, 2005, ...

Sau bước 5:

1, 1005, 1004, 2007, ...

Sau bước 6:

1, 1006, 1005, 2009, ...

Sau bước 7:

1, 1007, 1006, 2011, ...

Sau bước 8:

1, 1008, 1007, 2013, ...

Sau bước thứ 8, số 2013 xuất hiện lần đầu tiên. Sau đó, trừ tổng của cặp đầu tiên còn bé hơn 2013 thì các cặp còn lại đều lớn hơn 2013. Hơn nữa ngay từ đầu, sau mỗi lần thực hiện thì số thứ hai trong dãy tăng đúng một đơn vị nên sau 1013 bước thì số thứ hai

đó sẽ nhận giá trị 2013. Từ đó trở đi, sẽ không có số 2013 nào mới xuất hiện thêm nữa. Vậy với các số cho trước là 1 và 1000 thì số 2013 xuất hiện đúng hai lần.

(b) Ta sẽ chuyển việc thao tác trên các số từ 1 đến 1000 viết trên đường thẳng về các số từ 1 đến 1000 viết trên vòng tròn (có thể hiểu là thêm một đoạn $1000 - 1$ vào cuối dãy ban đầu) rồi tiến hành thực hiện với quy tắc tương tự.

Ở câu (a), ta đã chứng minh được rằng sau 2013 bước thì có đúng hai số 2013 nên với vòng tròn này, giả sử sau 2013 bước, có N số 2013 thì đáp số cần tìm - số các số 2013 xuất hiện trên đường thẳng ban đầu - chính là $N - 2$.

Ta sẽ xây dựng dãy A các cặp số một cách truy hồi như sau: Ban đầu, ta có

$$A = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (999, 1000), (1000, 1)\}.$$

Ở mỗi bước biến đổi, mỗi khi ta viết số $k = a + b$ vào giữa hai số a và b (từ trái sang phải), ta thêm hai cặp (a, k) và (k, b) vào dãy số A .

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $a + b$ rằng cặp số (a, b) xuất hiện trên dãy A chỉ khi $\gcd(a, b) = 1$ và nếu $\gcd(a, b) = 1$ thì cặp (a, b) xuất hiện đúng một lần trên dãy A .

Thật vậy, trường hợp cơ sở là dễ thấy. Tiếp theo, ta giả sử khẳng định đúng với mọi $a + b < k$, ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng với $a + b = k$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a < b$ (trường hợp còn lại chứng minh tương tự). Cặp số (a, b) được thêm vào dãy A khi ta viết số b vào giữa bộ $(a, b - a)$. Do $a + (b - a) = b < k$ nên cặp số $(a, b - a)$ xuất hiện trên dãy A chỉ khi $\gcd(a, b - a) = 1$. Hơn nữa, nếu $\gcd(a, b - a) = 1$ thì cặp số $(a, b - a)$ xuất hiện đúng một lần trên dãy A . Chú ý rằng $\gcd(a, b - a) = \gcd(a, b)$ nên khẳng định cũng đúng với $a + b = k$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi (a, b) .

Điều này cho thấy rằng số lần xuất hiện của 2013 trên dãy này chính là số cặp $(a, 2013 - a)$ với $\gcd(a, 2013 - a) = 1$. Do đó, số

lần xuất hiện của 2013 trên dãy số A là $N = \phi(2013) = 1200$. Vậy số lần xuất hiện của 2013 trên đường thẳng ban đầu là $N - 2 = 1200 - 2 = 1198$. $\square$

Nhận xét. Đây là bài toán thú vị nhất của ngày thi thứ nhất. Rất tiếc là nhiều bạn đã không dám đụng đến bài này (hoặc đơn giản là hết thời gian, do tốn nhiều sức cho các bài trước, đặc biệt là bài hình). Đó là một điều đáng tiếc vì câu (a) của bài toán hoàn toàn là một câu cho điểm. Một nguyên tắc cơ bản khi giải bài toán tổ hợp là phải... làm thử, cụ thể ở đây, với quy tắc biến đổi như thế phải làm thử qua các bước để cảm nhận bài toán.

Điểm mấu chốt trong lời giải bài toán là việc đưa về xét tình huống cơ bản khi bộ số ban đầu là $(k, k + 1)$. Quá trình sinh ra các bộ số mới hoàn toàn độc lập, không chườm lên nhau và phụ thuộc vào nhau. Rõ ràng trong các bài toán tổ hợp dạng như thế này, dự đoán và quy nạp đóng một vai trò quan trọng.

Cũng nói thêm rằng bài toán sẽ được giải quyết dễ dàng hơn nếu sử dụng dãy Farey và các tính chất của dãy này (được giới thiệu trong cuốn Tài liệu chuyên Toán - Đại số và Giải tích 11). Dãy Farey có định nghĩa như sau: Dãy Farey bậc n , ký hiệu F_n là dãy tăng các phân số trong đoạn $[0, 1]$ sao cho chúng là các phân số tối giản có dạng $\frac{a}{b}$ với $0 \leq a < b \leq n$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Phân số đầu tiên của dãy có giá trị 0 và ta quy ước viết $\frac{0}{1}$, phân số cuối cùng của dãy có giá trị 1 và ta quy ước viết $\frac{1}{1}$.

Bài 5. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 2013$ và:

$$(x - y)(f(f^2(x)) - f(f^2(y))) = (f(x) - f(y))(f^2(x) - f^2(y))$$

đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, trong đó $f^2(x) = (f(x))^2$.

Lời giải. Cho $x \neq 0$ và $y = 0$, ta được:

$$x \cdot f(f^2(x)) = f^3(x).$$

Suy ra:

$$f(f^2(x)) = \frac{f^3(x)}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

Thay vào phương trình ban đầu ta được:

$$(x-y) \left[\frac{f^3(x)}{x} - \frac{f^3(y)}{y} \right] = (f(x) - f(y))(f^2(x) - f^2(y)), \forall x, y \neq 0. \quad (1)$$

Thay $x < 0, y = 1$ vào (1), ta có

$$(x-1) \left[\frac{f^3(x)}{x} - 2013^3 \right] = (f(x) - 2013)(f^2(x) - 2013^2),$$

tương đương với:

$$(f(x) - 2013x)(f^2(x) - 2013^2x) = 0, \quad \forall x < 0.$$

Mặt khác, với $x < 0$ thì $f^2(x) > 2013^2x$, từ đó suy ra $f(x) = 2013x$ với mọi $x < 0$. Do đó $f(-1) = -2013$.

Thay $x > 0, y = -1$ vào (1), ta được:

$$(x+1) \left[\frac{f^3(x)}{x} + 2013^3 \right] = (f(x) + 2013)(f^2(x) - 2013^2),$$

tương đương với:

$$(f(x) - 2013x)(f^2(x) + 2013^2x) = 0, \quad \forall x > 0.$$

Suy ra:

$$f(x) = 2013x, \quad \forall x > 0.$$

Kết hợp với $f(0) = 0$, ta suy ra $f(x) = 2013x, \forall x \in \mathbb{R}$. Với $f(x) = 2013x$, ta có $f^2(x) = 2013^2x^2$ và:

$$f(f^2(x)) = f((2013x)^2) = 2013^3x^2.$$

Do đó, ta có

$$(x-y)(f(f^2(x)) - f(f^2(y))) = 2013^3(x-y)(x^2 - y^2)$$

và

$$(f(x) - f(y))(f^2(x) - f^2(y)) = (2013x - 2013y)(2013^2x^2 - 2013^2y^2) = 2013^3(x-y)(x^2 - y^2).$$

Từ hai đẳng thức trên, ta suy ra hàm số $f(x) = 2013x$ thỏa mãn tất cả các điều kiện của bài toán. Vậy $f(x) = 2013x$ là tất cả các hàm cần tìm. $\square$

Nhận xét. Đây là một bài toán khá cơ bản. Sẽ không quá khó khăn để đi đến đẳng thức (1) trong lời giải trên. Cách giải không có gì mới nhưng cũng chứa đựng một số bẫy khiến nhiều học sinh mất điểm, trong đó lỗi thường gặp nhất sẽ là:

$$(f(x) - ax)(f(x) - bx) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = ax & \forall x \\ f(x) = bx & \forall x \end{cases}$$

(Đúng ra là với mọi x thì $f(x) = ax$ hoặc $f(x) = bx$). Tình huống này cũng đã xuất hiện trong một số bài VMO trước đó. Chẳng hạn:

(1) (VMO B, 2002) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(y - f(x)) = f(x^{2002} - y) - 2001yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(2) (VMO, 2007) Cho b là số thực dương. Hãy xác định tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho:

$$f(x+y) = f(x) \cdot 3^{by+f(y)-1} + b^x (3^{by+f(y)-1} - b^y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ngoài cách đã sử dụng ở trên, học sinh có thể chứng minh bằng phản chứng để dẫn đến điều vô lý.

Có một điểm làm cho bài toán mất đẹp, đó là các điều kiện $f(0) = 0, f(1) = 2013$. Tất nhiên điều kiện $f(1) = 2013$ là “giả” nhưng điều kiện $f(0) = 0$ đã làm cho bài toán đơn giản đi rất nhiều. Tình huống phải thêm điều kiện này đã gặp phải ở bài phương trình hàm VMO 2012 khi tác giả “bắt buộc” phải thêm điều kiện f toàn ánh, vốn là một điều kiện rất thiếu tự nhiên. Việc thêm các điều kiện như vậy phần nào giảm đi tính trọn vẹn của bài toán.

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm D thuộc cung BC không chứa điểm A . Đường thẳng Δ thay đổi đi qua trực tâm H của tam giác ABC cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH và ACH lần lượt tại M và N ($M \neq H, N \neq H$).

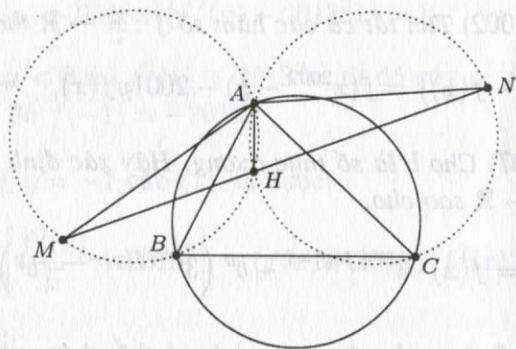
(a) Xác định vị trí của đường thẳng Δ để diện tích tam giác AMN lớn nhất.

(b) Ký hiệu d_1 là đường thẳng đi qua M và vuông góc với DB , d_2 là đường thẳng đi qua N và vuông góc với DC . Chứng minh rằng giao điểm P của d_1 và d_2 luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải. (a) Dễ thấy rằng $R_{(AHB)} = R_{(AHC)} = R_{(ABC)}$ không đổi (trong đó $R_{(XYZ)}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ). Lại có AM và AN là hai dây cung chắn góc $\widehat{AHM}$ và $\widehat{AHN}$ nên $AM = AN$.

Ta có

$$\begin{aligned}(AM, AN) &\equiv (AB, AC) + (AM, AB) + (AC, AN) \pmod{\pi} \\ &\equiv (AB, AC) + (HM, HB) + (HC, HN) \pmod{\pi} \\ &\equiv (AB, AB) + (HC, HB) \equiv 2 \cdot (AB, AC) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

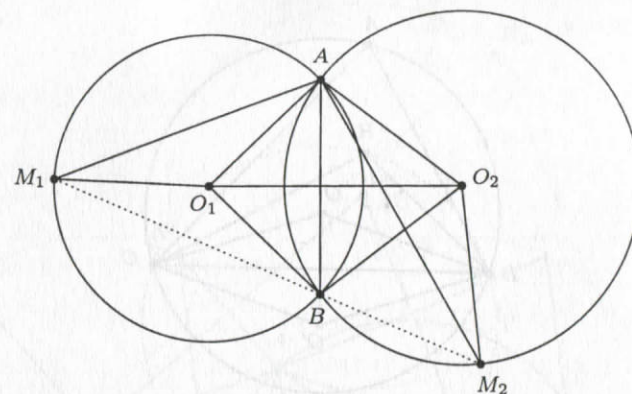


Do đó (AM, AN) không đổi (theo modulo π). Suy ra diện tích tam giác AMN lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất. Điều này xảy ra khi AM, AN lần lượt là đường kính của (AHB) và (AHC) . Khi đó, ta có $\widehat{AHM} = \widehat{AHN} = 90^\circ$, tức $MH \parallel BC$.

(b) [†]Để cho tiện việc trình bày, ta ký hiệu $D_{XY}, T_{\overline{XY}}$ theo thứ tự chỉ phép đối xứng trục có trục đối xứng là XY và phép tịnh tiến theo vector $\overline{XY}$. Trước hết ta cần có hai bổ đề:

Bổ đề 1. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B . Hai điểm M_1, M_2 theo thứ tự thuộc $(O_1), (O_2)$ sao cho B thuộc M_1M_2 . Khi đó các tam giác AM_1M_2, AO_1O_2 đồng dạng cùng hướng.

[†]Lời giải của TS Nguyễn Minh Hà, trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội.



Chứng minh. Ta thấy vì $M_1M_2 \equiv M_1B$ nên:

$$\begin{aligned}(M_1A, M_1M_2) &\equiv (M_1A, M_1B) \pmod{\pi} \\ &\equiv \frac{1}{2} (\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}) \pmod{\pi} \quad (M_1, A, B \in (O_1)) \\ &\equiv (O_1A, O_1O_2) \pmod{\pi} \quad (O_1A = O_1B, O_1O_2 \perp AB).\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$(M_2A, M_2M_1) \equiv (O_2A, O_2O_1) \pmod{\pi}.$$

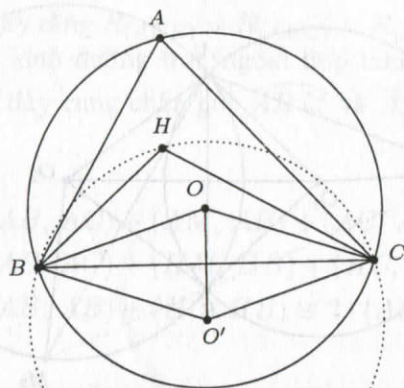
Vậy các tam giác AM_1M_2, AO_1O_2 đồng dạng cùng hướng. ■

Bổ đề 2. Nếu H là trực tâm của tam giác không vuông ABC thì đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, HBC là ảnh của nhau D_{BC} .

Chứng minh. Gọi $(O), (O')$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, HBC ; gọi M là giao điểm của BC và OO' . Ta thấy:

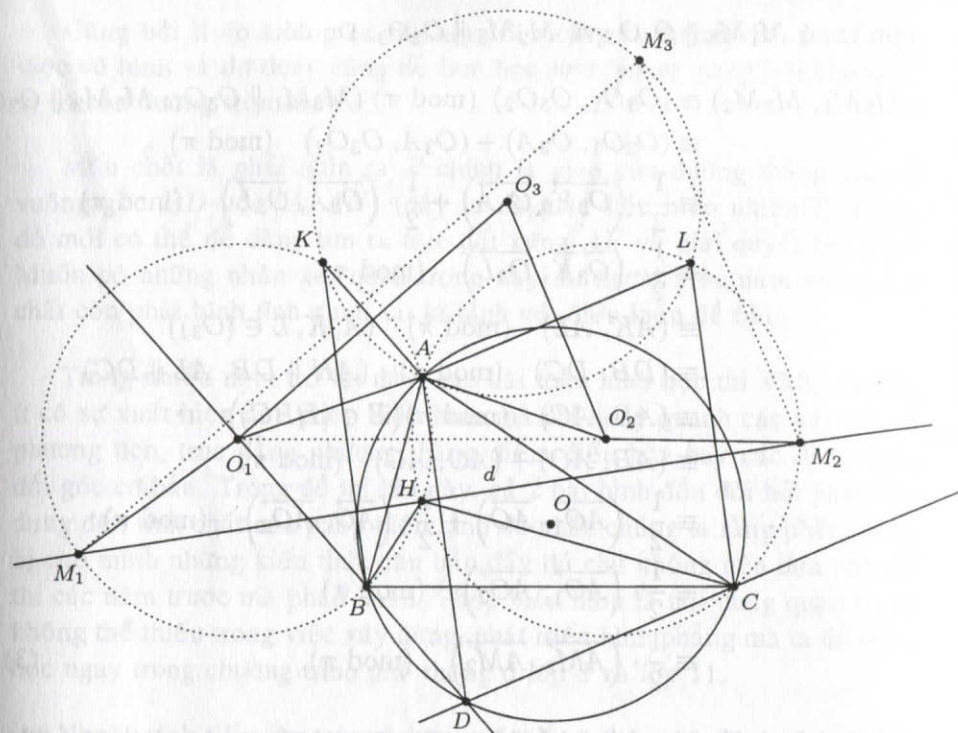
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) &\equiv 2 \cdot (AB, AC) \pmod{2\pi} \quad (A, B, C \in (O)) \\ &\equiv 2 \cdot (HC, HB) \pmod{2\pi} \quad (AB \perp HC, AC \perp HB) \\ &\equiv (\overrightarrow{O'C}, \overrightarrow{O'B}) \pmod{2\pi} \quad (H, B, C \in (O')) \\ &\equiv -(\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'C}) \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Từ đó, chú ý rằng $\frac{OB}{OC} = 1 = \frac{O'B}{O'C}$, suy ra các tam giác $OBC, O'BC$ đồng dạng ngược hướng. Kết hợp với $\frac{BC}{BC} = 1$, suy ra các tam giác $OBC, O'BC$ bằng nhau ngược hướng.



Suy ra O, O' thuộc hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ BC và các tam giác $OBC, O'BC$ bằng nhau. Do đó O, O' là ảnh của nhau qua D_{BC} . Vậy hai đường tròn $(O), (O')$ là ảnh của nhau qua D_{BC} . ■

Trở lại bài toán trên. Dựng các hình bình hành $ADBK, ADCL$. Gọi (O_3) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle AKL$.



Rõ ràng $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CL}$ nên $\triangle AKL = T_{\overrightarrow{DA}}(\triangle BDC)$. Suy ra:

$$(O_3) = T_{\overrightarrow{DA}}((O)).$$

Điều đó có nghĩa là (O_3) cố định.

(1)

Ta thấy:

$$\begin{aligned} (KA, KB) &\equiv (DB, DA) \pmod{\pi} \quad (KA \parallel DB, KB \parallel DA) \\ &\equiv (CB, CA) \pmod{\pi} \quad (C \in (DBA)) \\ &\equiv (HA, HB) \pmod{\pi} \quad (CB \perp HA, CA \perp HB). \end{aligned}$$

Do đó $K \in (O_1)$ nên suy ra $AK \perp O_1O_3$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $AL \perp O_2O_3$. Theo bổ đề 1, các tam giác AM_1M_2, AO_1O_2 đồng dạng (cùng hướng). Theo bổ đề 2, $AO_1 = AO = AO_2$ nên:

$$AM_1 = AM_2. \quad (2)$$

Gọi M_3 là giao điểm của các đường thẳng d_1, d_2 . Vì:

$$\begin{cases} M_1M_3 \equiv d_1 \perp DB \parallel AK \perp O_1O_3 \\ M_2M_3 \equiv d_2 \perp DC \parallel AL \perp O_2O_3 \end{cases}$$

nên ta có $M_1M_3 \parallel O_1O_3$ và $M_2M_3 \parallel O_2O_3$. Do đó:

$$\begin{aligned}
 (M_3M_1, M_3M_2) &\equiv (O_3O_1, O_3O_2) \pmod{\pi} \quad (M_3M_1 \parallel O_3O_1, M_3M_2 \parallel O_3O_2) \\
 &\equiv (O_3O_1, O_3A) + (O_3A, O_3O_2) \pmod{\pi} \\
 &\equiv \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{O_3K}, \overrightarrow{O_3A}) + \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{O_3A}, \overrightarrow{O_3L}) \pmod{\pi} \\
 &\equiv \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{O_3K}, \overrightarrow{O_3L}) \pmod{\pi} \\
 &\equiv (AK, AL) \pmod{\pi} \quad (A, K, L \in (O_3)) \\
 &\equiv (DB, DC) \pmod{\pi} \quad (AK \parallel DB, AL \parallel DC) \\
 &\equiv (AB, AC) \pmod{\pi} \quad (E \in (DBC)) \\
 &\equiv (AB, AO) + (AO, AC) \pmod{\pi} \\
 &\equiv \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO}) + \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO_2}) \pmod{\pi} \\
 &\equiv \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}) \pmod{\pi} \\
 &\equiv \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}) \pmod{\pi}. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối đúng theo bổ đề 1. Từ (2) và (3) suy ra A là tâm của đường tròn $(M_1M_2M_3)$. Kết hợp với $AK \perp O_1O_3 \parallel M_1M_3$, ta suy ra:

$$M_3 = D_{AK}(M_1). \tag{4}$$

Chú ý rằng:

$$M_1 \in (O_1). \tag{5}$$

Theo chứng minh trên $(O_3) = T_{\overline{DA}}((O))$, còn theo bổ đề 2 thì $(O) = D_{AB}((O_1))$. Suy ra:

$$(O_3) = D_{AK}((O_1)). \tag{6}$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra:

$$M_3 \in (O_3). \tag{7}$$

Từ (1) và (7) suy ra M_3 luôn thuộc một đường tròn cố định (đường tròn (O_3)). $\square$

Nhận xét. Đây lại là một ứng dụng đẹp của phép đối xứng trục, trong bài này thì “trục” còn khó nhìn ra hơn ở bài 3b trước đó. Có lẽ nhiều học sinh đã đi đến kết quả P thuộc (A, AM) nhưng lại bị cách xác định điểm P đánh lạc hướng, và không tận dụng được kết quả trên.

Cũng bởi lí do không có sẵn trục đối xứng là đường thẳng AF nên việc vẽ hình và dự đoán cũng dễ làm học sinh hoang mang bởi không rõ vị trí của đường tròn chứa P .

Mấu chốt là phải nhìn ra P chính là giao của đường thẳng qua N vuông góc BD với (A, AN) (đây lại là một điều hiển nhiên!?) rồi từ đó mới có thể dễ dàng tìm ra trục đối xứng AF và giải quyết bài toán. Muốn có những nhận xét quan trọng này thì ngoài việc nắm vững tính chất còn phải bình tĩnh quan sát kĩ hình vẽ, điều kiện đề bài.

Trong nhiều năm trở lại đây, các bài toán hình học thi VMO thường ít có sự xuất hiện của phép biến hình mà chỉ xoay quanh các vấn đề về phương tích, trục đẳng phương, hàng điểm điều hòa hay các dạng biến đổi góc cơ bản. Trong đề thi lần này, cả 2 bài hình đều đòi hỏi phải vận dụng đến tính chất của phép biến hình đã nhắc chúng ta rằng phải chuẩn bị cho mình những kiến thức căn bản đầy đủ chứ không nên dựa vào đề thi các năm trước mà phán đoán. Phép biến hình là nội dung quan trọng không thể thiếu trong việc xây dựng, phát triển hình phẳng mà ta đã được học ngay trong chương trình phổ thông ở lớp 8 và lớp 11.

Ngoài cách tiếp cận trên, ta cũng có thể vẽ thêm các hình phụ để tạo ra mô hình theo phép đối xứng và chỉ ra cụ thể tâm của đường tròn cố định cần tìm.

Bài 7. Tìm số các bộ sắp thứ tự (a, b, c, a', b', c') thỏa mãn:

$$\begin{cases} ab + a'b' \equiv 1 \pmod{15} \\ bc + b'c' \equiv 1 \pmod{15} \\ ca + c'a' \equiv 1 \pmod{15} \end{cases}$$

với $a, b, c, a', b', c' \in \{0, 1, \dots, 14\}$.

Lời giải. Với mỗi số nguyên dương k , gọi N_k là số bộ sắp thứ tự (a, b, c, a', b', c') thỏa mãn điều kiện:

$$ab + a'b' \equiv bc + b'c' \equiv ca + c'a' \equiv 1 \pmod{k},$$

và $a, b, c, a', b', c' \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Theo định lý phần dư Trung Hoa thì:

$$N_{mn} = N_n \times N_m$$

nếu $\gcd(n, m) = 1$. Do đó, để tính giá trị của N_{15} , ta cần phải tính giá trị của N_3 và N_5 .

Trước hết, ta tính N_p với mỗi p là số nguyên tố. Cố định các giá trị (a, b, a', b') của phương trình $ab + a'b' \equiv 1 \pmod{p}$, ta cần tính số nghiệm của hệ sau:

$$bc + b'c' \equiv ca + c'a' \equiv 1. \pmod{p} \quad (1)$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $(a, a') \not\equiv t(b, b') \pmod{p}$ với mọi $t \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Khi đó, hệ (1) có nghiệm duy nhất:

$$c \equiv \frac{a' - b'}{a'b - b'a'}, \quad c' \equiv \frac{a - b}{ab' - ba'} \pmod{p}.$$

- Nếu $(a, a') \equiv t(b, b') \pmod{p}$ với $t \neq 1$. Khi đó, hệ (1) không có nghiệm.
- Nếu $(a, a') \equiv (b, b') \pmod{p}$. Khi đó, hệ (1) trở thành một phương trình duy nhất là:

$$bc + b'c' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Do $ba + b'a' \equiv 1 \pmod{p}$, ta có thể giả sử rằng $b \neq 0$. Do đó, với mỗi cách chọn c' , ta có duy nhất một cách chọn giá trị $c \equiv \frac{1 - b'c'}{b} \pmod{p}$. Điều này cho thấy rằng hệ (1) có đúng p nghiệm.

Đặt T_p là số bộ sắp thứ tự (a, b, a', b') thỏa mãn $ab + a'b' \equiv 1 \pmod{p}$ và $a, b, a', b' \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Với mỗi bộ $(a, a') \neq (0, 0)$, có đúng p cặp (b, b') thỏa mãn phương trình. Suy ra, $T_p = p(p^2 - 1)$.

Đặt $C_p(t)$ là số bộ sắp thứ tự (a, b) thỏa mãn $a^2 + b^2 \equiv t \pmod{p}$ và $a, b \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Từ lập luận ở trên, ta có

$$N_p = T_p - \sum_{t=1}^{p-1} C_p(t) + pC_p(1) = p(p^2 - 1) - p^2 + C_p(0) + pC_p(1).$$

Để dàng tính được rằng $C_3(0) = 1, C_3(1) = 4, C_5(0) = 9, C_5(1) = 4$, dẫn đến $N_3 = 28, N_5 = 124$ và:

$$N_{15} = 28 \cdot 124 = 3472.$$

Vậy số các bộ (a, b, c, a', b', c') thỏa mãn điều kiện đề bài là 3472. $\square$

Nhận xét. Bài này là một tình huống áp dụng định lý Trung hoa về số dư khá cơ bản, tuy nhiên có vẻ như các thí sinh không được học nhiều lắm về định lý này dưới góc độ ánh xạ “phục hồi” $\theta: \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_{pq}$ vốn là ứng dụng quan trọng nhất của định lý này: Một số thuộc $\mathbb{Z}_{pq}$ được xác định một cách duy nhất qua cặp số dư của nó khi chia cho p và q . Từ đó ta có thể chuyển các bài toán trên $\mathbb{Z}_{pq}$ về các bài toán trên $\mathbb{Z}_p$ và trên $\mathbb{Z}_q$.

Trước đây, định lý Trung hoa về số dư thường được sử dụng trong các bài toán như thế này:

- (1) Cho hai số nguyên dương p, q lớn hơn 1 và nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho $(pq-1)nk+1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n .
- (2) Chứng minh rằng với mọi n , tồn tại n số nguyên dương liên tiếp mà mỗi số đều chia hết cho bình phương của một số nguyên tố.
- (3) Xét đa thức $P(x) = (2x+1)(3x+1)$. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, tồn tại x nguyên sao cho $P(x)$ chia hết cho n .

Vì thế góc nhìn dưới góc độ ánh xạ phục hồi chưa được giới thiệu một cách đầy đủ.

“Tiền sử” VMO “ghi nhận” bài toán sau có nét giống nhất với bài toán VMO năm nay về cách áp dụng định lý Trung hoa về số dư - bài VMO 2008: Cho $m = 2007^{2008}$. Tồn tại bao nhiêu số nguyên dương n sao cho $n < m$ và $n(2n+1)(5n+2)$ chia hết cho m ?

Ở bài toán 7, sau khi sử dụng định lý phần dư Trung Hoa, ta có thể tính toán, xét các trường hợp trực tiếp để đếm các giá trị N_3, N_5 . Bài toán này có thể tổng quát như sau: Cho p là một số nguyên tố, gọi $f(p)$ là số tất cả bộ sắp thứ tự (a, b, c, a', b', c') thỏa mãn:

$$\begin{cases} ab + a'b' \equiv x \pmod{p} \\ bc + b'c' \equiv y \pmod{p} \\ ca + c'a' \equiv z \pmod{p} \end{cases}$$

với $a, b, c, a', b', c' \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ và $0 \leq x, y, z \leq p-1$. Khi đó:

- Nếu $0 < x, y, z \leq p-1$ thì:

$$f(p) = p^3 - 1 = (p-1)(p^2 + p + 1) \text{ nếu } p \equiv 1 \pmod{4}.$$

$$\circ f(p) = p^3 + 1 = (p+1)(p^2 - p + 1) \text{ nếu } p \equiv 3 \pmod{4}.$$

• Nếu trong ba số x, y, z có một số bằng 0 thì:

$$\circ f(p) = p^3 - p^2 + p - 1 = (p-1)(p^2 + 1) \text{ nếu } p \equiv 1 \pmod{4}.$$

$$\circ f(p) = p^3 - p^2 - p + 1 = (p+1)(p-1)^2 \text{ nếu } p \equiv 3 \pmod{4}.$$

• Nếu trong ba số x, y, z có hai số bằng 0 thì:

$$\circ f(p) = 2p^3 - 3p^2 + 2p - 1 = (p-1)(2p^2 - p + 1) \text{ nếu } p \equiv 1 \pmod{4}.$$

$$\circ f(p) = 2p^3 - p^2 - 2p + 1 = (p+1)(p-1)(2p-1) \text{ nếu } p \equiv 3 \pmod{4}.$$

• Nếu cả ba số x, y, z đều bằng 0 thì:

$$\circ f(p) = 5p^3 - 6p^2 + 3p - 1 \text{ nếu } p \equiv 1 \pmod{4}.$$

$$\circ f(p) = 3p^3 - 3p + 1 \text{ nếu } p \equiv 3 \pmod{4}.$$

Ta thử kiểm tra các biểu thức trên:

• Với $p \equiv 1 \pmod{4}$ thì số tất cả các trường hợp xảy ra là:

$$(p-1)^3(p^3-1) + 3(p-1)^2(p^3-p^2+p-1) + 3(p-1)(2p^3-3p^2+2p-1) + (5p^3-6p^2+3p-1) = p^6.$$

• Với $p \equiv 3 \pmod{4}$ thì số tất cả các trường hợp xảy ra là:

$$(p-1)^3(p^3+1) + 3(p-1)^2(p^3-p^2+p-1) + 3(p-1)(2p^3-p^2-2p+1) + (3p^3-3p+1) = p^6.$$

Hoàn toàn trùng khớp do mỗi số a, b, c, a', b', c' có p cách chọn.

Cũng cần chú ý thêm rằng, với p, q là hai số nguyên tố phân biệt bất kỳ thì $(p, q) = 1$. Do đó, theo định lý phần dư Trung Hoa, ta có $f(p) \cdot f(q) = f(pq)$, suy ra f là hàm nhân tính.

Ta chỉ cần tìm công thức tổng quát cho $f(p^k)$ với p nguyên tố và $k > 1$ là có thể tổng quát được bài toán khi thay 15 bởi một số nguyên dương lớn hơn 1 bất kỳ.

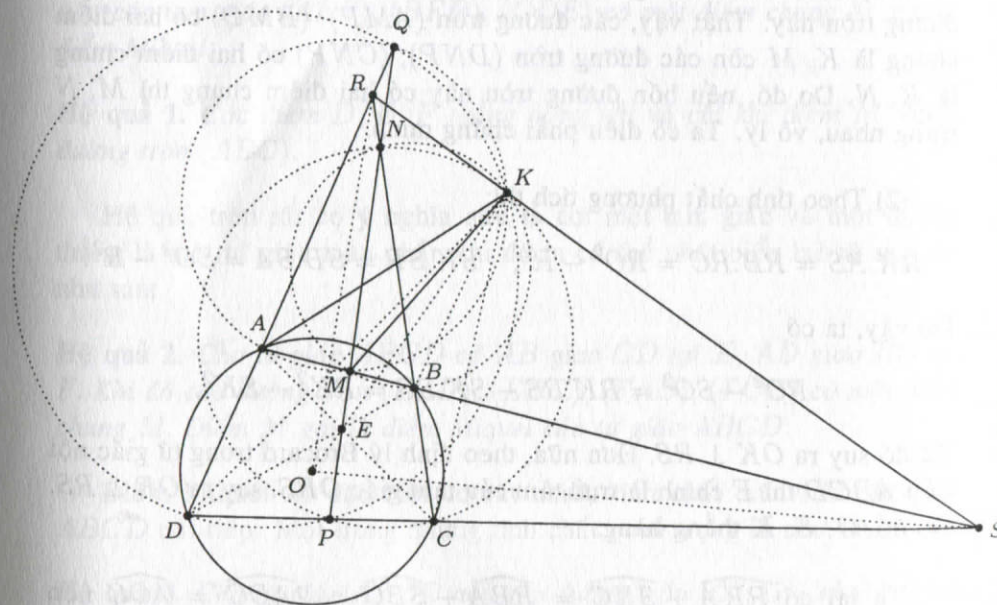
LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC TOÁN QUỐC GIA NĂM 2013

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ lồi có các cạnh đối không song song nội tiếp đường tròn (O, R) . Gọi E là giao điểm hai đường chéo và đường phân giác góc AEB cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt tại các điểm M, N, P, Q .

(1) Chứng minh rằng các đường tròn $(AQM), (BMN), (CNP), (DPQ)$ cùng đi qua một điểm duy nhất. Gọi điểm đó là K .

(2) Đặt $\min\{AC, BD\} = m$. Chứng minh rằng $OK \leq \frac{2R^2}{\sqrt{4R^2 - m^2}}$.

Lời giải. (1) Gọi R là giao điểm của AD, BC và S là giao điểm của AB, CD (do các cạnh đối của tứ giác $ABCD$ không song song nên các điểm này hoàn toàn xác định). Giả sử B nằm giữa A, S và nằm giữa C, R như hình vẽ.



Gọi K là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác RAB, SBC

thì:

$$\widehat{BKR} + \widehat{BKS} = \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ,$$

hay R, K, S thẳng hàng. Suy ra $RK.RS = RB.RC = RA.RD$ và $SK.SR = SB.SA = SC.SD$ nên các tứ giác $ADSK$ và $CDRK$ cũng nội tiếp hay K cũng thuộc về các đường tròn (RCD) và (SDA) . Do đó, ta có $\widehat{AKD} = \widehat{ASD} = \widehat{BSC} = \widehat{BKC}$ và $\widehat{ADK} = \widehat{ASK} = \widehat{BSK} = \widehat{BCK}$, nên các tam giác KAD và KBC đồng dạng. Suy ra

$$\frac{KA}{KB} = \frac{AD}{BC} = \frac{AE}{BE} = \frac{AM}{BM}.$$

Theo tính chất đường phân giác thì KM là phân giác của góc AKB . Mặt khác, ta có

$$\widehat{RNQ} = \widehat{BNE} = \widehat{CBD} - \widehat{BEN} = \widehat{CAD} - \widehat{AEQ} = \widehat{RQN}.$$

Suy ra $\widehat{ARB} = 2\widehat{BNM}$. Từ đây ta có $\widehat{BKM} = \frac{1}{2}\widehat{AKB} = \frac{1}{2}\widehat{ARB} = \widehat{BNM}$ hay tứ giác $BMNK$ nội tiếp, tức là K thuộc đường tròn (BMN) . Chứng minh tương tự, ta cũng có K thuộc các đường tròn (AQM) , (CNP) , (DPQ) .

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng K là điểm chung duy nhất của các đường tròn này. Thật vậy, các đường tròn (AMP) , (BMQ) có hai điểm chung là K, M còn các đường tròn (DNP) , (CNP) có hai điểm chung là K, N . Do đó, nếu bốn đường tròn này có hai điểm chung thì M, N trùng nhau, vô lý. Ta có điều phải chứng minh.

(2) Theo tính chất phương tích thì:

$$RK.RS = RB.RC = RO^2 - R^2, \quad SK.SR = SB.SA = SO^2 - R^2.$$

Do vậy, ta có

$$RO^2 - SO^2 = RK.RS - SK.SR = RK^2 - SK^2.$$

Từ đó suy ra $OK \perp RS$. Hơn nữa, theo định lý Brocard trong tứ giác nội tiếp $ABCD$ thì E chính là trực tâm của tam giác ORS , suy ra $OE \perp RS$. Do đó, O, E, K thẳng hàng.

Ta lại có $\widehat{RKA} + \widehat{SKC} = \widehat{RBA} + \widehat{SBC} = 2\widehat{ADC} = \widehat{AOC}$ nên $\widehat{AKC} + \widehat{AOC} = 180^\circ$ hay tứ giác $AOCK$ nội tiếp. Suy ra

$$EO.EK = EA.EC = R^2 - OE^2.$$

Và như thế, ta có $EO.(EO + EK) = R^2$, hay

$$OK = \frac{R^2}{EO}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức cơ bản về đường xiên và đường vuông góc thì:

$$\begin{aligned} EO &\geq \max \{d(O, AC), d(O, BC)\} \\ &= \max \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - AC^2}, \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - BD^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - m^2}. \end{aligned}$$

Vậy ta được $OK \leq \frac{2R^2}{\sqrt{4R^2 - m^2}}$. Đây chính là kết quả cần chứng minh. $\square$

Nhận xét. Lời giải của bài toán dựa trên hai định lý rất cơ bản của hình học là điểm Miquel của tứ giác toàn phần và định lý Brocard. Nói đến định lý Miquel thì nhiều người đã quen thuộc với nó ở dạng phát biểu sau đây:

Định lý 1 (Định lý Miquel). Cho tam giác ABC và các điểm D, E, F lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB . Khi đó các đường tròn ngoại tiếp các tam giác (AEF) , (BFD) , (CDE) có một điểm chung M gọi là điểm Miquel.

Hệ quả 1. Các điểm D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi điểm M thuộc đường tròn (ABC) .

Hệ quả trên rất có ý nghĩa nếu ta coi một tam giác và một đường thẳng là một tứ giác toàn phần khi đó ta có thể phát biểu lại hệ quả đó như sau:

Hệ quả 2. Cho tứ giác $ABCD$ có AB giao CD tại E , AD giao BC tại F . Khi đó các đường tròn (EAD) , (EBC) , (FAB) , (FCD) có một điểm chung M . Điểm M gọi là điểm Miquel của tứ giác $ABCD$.

Điểm Miquel M đặc biệt có rất nhiều tính chất thú vị khi tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Một trong những tính chất quan trọng là như sau:

Hệ quả 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Giả sử AB giao CD tại E , AD giao BC tại F , AC giao BD tại G . Khi đó các đường tròn (EAD) , (EBC) , (FAB) , (FCD) có một điểm chung M , ngoài ra ta cũng có ba điểm O, G, M thẳng hàng.

Định lý Brocard cũng là một định lý đã khá quen thuộc.

Định lý 2 (Định lý Brocard). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Giả sử AB giao CD tại E , AD giao BC tại F , AC giao BD tại G . Khi đó O là trực tâm tam giác EFG .

Một trong những bài toán ứng dụng hay của định lý này chính là bài thi Quốc gia năm 2012 vừa qua.

Chứng minh của định lý Miquel và các hệ quả có thể coi là một trong những thể hiện quan trọng nhất của việc phải sử dụng góc định hướng trong hình học. Ở bài này, nếu không dùng độ dài đại số cũng như góc định hướng, ta phải quy ước vị trí các điểm như đã trình bày để lời giải được chặt chẽ.

Bài thi là một trong những ý tưởng hay cho việc kết hợp định lý Miquel và định lý Brocard đặc biệt là câu (2). Ý tưởng của câu này có lẽ bắt nguồn từ đẳng thức $OK.OE = \overline{OR}.OS = R^2$; tuy nhiên, để giấu đi sự hiện diện điểm E thì bài thi đã đưa về một bất đẳng thức liên hệ giữa đường xiên và hình chiếu:

$$OE \geq \max \{d(O, AC), d(O, BD)\} = \sqrt{R^2 - \frac{\min\{AC^2, BD^2\}}{4}}.$$

Thực sự ý tưởng muốn giấu đi điểm E khá hay, song việc phải dùng đến một bất đẳng thức hình học đã khiến cho bài toán mất đi khá nhiều vẻ đẹp của nó.

Bài toán này cũng có thể giải bằng cách sử dụng bổ đề sau liên quan đến phép biến hình như sau:

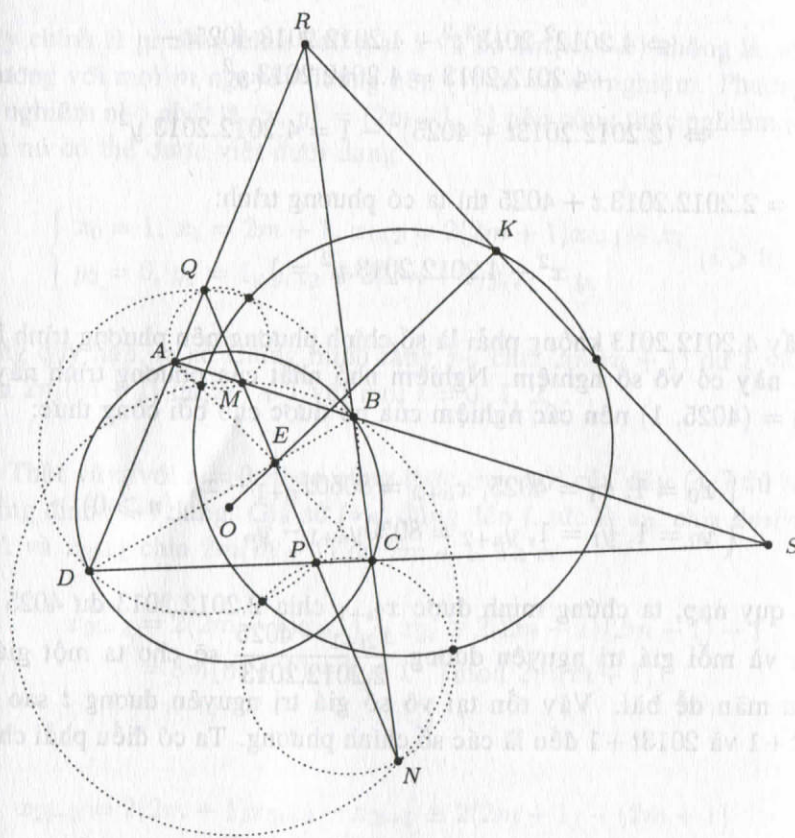
Cho hai đoạn thẳng AB, CD sao cho $ABCD$ không phải là hình thang. Khi đó, tồn tại một phép vị tự quay tâm O biến AB thành CD . Nếu P là giao điểm của AB và CD , Q là giao điểm của AD và BC thì các tứ giác $ADPK, BCPK, ABQK, CDQK$ nội tiếp.

Trong bài toán đã cho, điểm K cũng chính là tâm của phép vị tự quay đó.

Ý tưởng sử dụng bất đẳng thức ở đây khá giống với bài hình số 5 trong đề thi TST 2006, cũng là sự so sánh giữa đường xiên và đường vuông góc. Tuy nhiên, ở đây ta không cần chỉ ra với trường hợp nào thì đẳng thức xảy ra.

Nếu tổng quát lên, thay đường phân giác góc E thành đường thẳng bất kỳ qua E , ta có bài toán sau:

Cho tứ giác $ABCD$ lồi có các cạnh đối không song song nội tiếp đường tròn (O, R) . Gọi E là giao điểm hai đường chéo và một đường thẳng bất kỳ đi qua E cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt tại các điểm M, N, P, Q . Chứng minh rằng giao điểm khác M, N, P, Q của các cặp đường tròn $(AQM), (BMN); (BMN), (CNP); (CNP), (DPQ)$ và $(DPQ), (AQM)$ cùng thuộc một đường tròn và đường tròn đó đi qua điểm Miquel K của tứ giác $ABCD$.



Trong trường hợp đường thẳng bất kỳ trên trở thành phân giác thì bốn giao điểm trên trùng nhau và trùng với điểm Miquel K của tứ giác $ABCD$.

Bài 2.

(1) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương t sao cho $2012t + 1$ và $2013t + 1$ đều là các số chính phương.

(2) Xét m, n là các số nguyên dương sao cho $mn + 1$ và $(m + 1)n + 1$ đều là các số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho $8(2m + 1)$.

Lời giải. (1) Đặt $d = \gcd(2012t + 1, 2013t + 1)$ thì dễ thấy $d = 1$. Do đó, ta có $2012t + 1$ và $2013t + 1$ đều là các số chính phương khi và chỉ khi $(2012t + 1)(2013t + 1) = y^2$ với y là số nguyên dương nào đó. Ta biến đổi đẳng thức trên:

$$(2012t + 1)(2013t + 1) = y^2$$

$$\Leftrightarrow 4.2012^2.2013^2t^2 + 4.2012.2013.4025t + 4.2012.2013 = 4.2012.2013.y^2$$

$$\Leftrightarrow (2.2012.2013t + 4025)^2 - 1 = 4.2012.2013.y^2.$$

Đặt $x = 2.2012.2013.t + 4025$ thì ta có phương trình:

$$x^2 - 4.2012.2013.y^2 = 1.$$

Dễ thấy $4.2012.2013$ không phải là số chính phương nên phương trình Pell loại 1 này có vô số nghiệm. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình này là $(x, y) = (4025, 1)$ nên các nghiệm của nó được cho bởi công thức:

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 4025, x_{n+2} = 8050x_{n+1} - x_n \\ y_0 = 1, y_1 = 1, y_{n+2} = 8050y_{n+1} - y_n \end{cases} \quad (n \geq 0).$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được x_{2i+1} chia $2.2012.2013$ dư 4025 với mọi i và mỗi giá trị nguyên dương $\frac{x_{2i+1} - 4025}{2.2012.2013}$ sẽ cho ta một giá trị t thỏa mãn đề bài. Vậy tồn tại vô số giá trị nguyên dương t sao cho $2012t + 1$ và $2013t + 1$ đều là các số chính phương. Ta có điều phải chứng minh.

(2) Đặt $d = \gcd(mn + 1, mn + n + 1)$ thì ta có $d \mid (mn + n + 1 - mn - 1)$ hay $d \mid n$, suy ra

$$d \mid (mn + 1 - mn) \Leftrightarrow d \mid 1.$$

Như vậy, ta có $d = 1$ hay các số $mn + 1, (m + 1)n + 1$ nguyên tố cùng nhau. Khi đó, $mn + 1$ và $(m + 1)n + 1$ đều là các số chính phương khi và chỉ khi $(mn + 1)[(m + 1)n + 1]$ là số chính phương. Giả sử

$(mn + 1)[(m + 1)n + 1] = y^2$ với $y \in \mathbb{Z}^+$. Biến đổi biểu thức này, ta thu được:

$$m(m + 1)n^2 + (2m + 1)n + 1 = y^2$$

$$\Leftrightarrow 4m^2(m + 1)^2n^2 + 4m(m + 1)(2m + 1)n + 4m(m + 1) = 4m(m + 1)y^2$$

$$\Leftrightarrow [2m(m + 1)n + (2m + 1)]^2 - 1 = 4m(m + 1)y^2.$$

Đặt $x = 2m(m + 1)n + (2m + 1)$ thì ta có phương trình sau:

$$x^2 - 4m(m + 1)y^2 = 1. \quad (*)$$

Đây chính là phương trình Pell loại 1 và do $4m(m + 1)$ không là số chính phương với mọi m nguyên dương nên $(*)$ có vô số nghiệm. Phương trình có nghiệm nhỏ nhất là $(x, y) = (2m + 1, 1)$ nên công thức nghiệm (x_i, y_i) của nó có thể được viết dưới dạng:

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 2m + 1, x_{i+2} = 2(2m + 1)x_{i+1} - x_i \\ y_0 = 0, y_1 = 1, y_{i+2} = 2(2m + 1)y_{i+1} - y_i \end{cases} \quad (i \geq 0).$$

Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh rằng x_{2i} chia $2m(m + 1)$ dư 1 và x_{2i+1} chia $2m(m + 1)$ dư $2m + 1$ với mọi $i = 0, 1, 2, \dots$ (**)

Thật vậy, với $i = 0$, theo công thức truy hồi của dãy (x_i) thì ta thấy khẳng định (**) đúng. Giả sử (**) đúng đến i , tức là x_{2i} chia $2m(m + 1)$ dư 1 và x_{2i+1} chia $2m(m + 1)$ dư $2m + 1$. Ta có

$$\begin{aligned} x_{2i+2} &= 2(2m + 1)x_{2i+1} - x_{2i} \equiv 2(2m + 1)(2m + 1) - 1 \\ &= 8m(m + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{2m(m + 1)} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} x_{2i+3} &= 2(2m + 1)x_{2i+2} - x_{2i+1} \equiv 2(2m + 1) - (2m + 1) \\ &\equiv 2m + 1 \pmod{2m(m + 1)}. \end{aligned}$$

Do đó, (**) cũng đúng với $i + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, (**) đúng với mọi số tự nhiên i .

Tiếp theo, ta sẽ xây dựng công thức truy hồi cho dãy $r_i = x_{2i+1}$ với

$i = 0, 1, 2, \dots$ Ta có

$$\begin{aligned} r_{i+2} &= x_{2i+5} = 2(2m+1)x_{2i+4} - x_{2i+3} \\ &= 2(2m+1)[2(2m+1)x_{2i+3} - x_{2i+2}] - x_{2i+3} \\ &= [4(2m+1)^2 - 1]x_{2i+3} - 2(2m+1)x_{2i+2} \\ &= [4(2m+1)^2 - 1]x_{2i+3} - (x_{2i+3} + x_{2i+1}) \\ &= [4(2m+1)^2 - 2]x_{2i+3} - x_{2i+1} \\ &= [4(2m+1)^2 - 2]r_{i+1} - r_i. \end{aligned}$$

Đặt $r_i = 2m(m+1)s_i + (2m+1)$ thì dãy (s_i) , $i > 0$ nguyên dương và xác định duy nhất. Thay vào công thức truy hồi của (r_i) , ta được

$$2m(m+1)s_{i+2} + (2m+1) = [4(2m+1)^2 - 2][2m(m+1)s_{i+1} + (2m+1)] - [2m(m+1)s_i + (2m+1)].$$

Hệ thức trên có thể được viết lại thành:

$$2m(m+1)s_{i+2} = 2m(m+1)[4(2m+1)^2 - 2]s_{i+1} - 2m(m+1)s_i + 4(2m+1)[(2m+1)^2 - 1]$$

hay

$$s_{i+2} = [4(2m+1)^2 - 2]s_{i+1} - s_i + 8(2m+1).$$

Ta tính được $r_0 = x_1 = 2m+1$ nên $s_0 = 0$ và:

$$\begin{aligned} r_1 &= x_3 = 2(2m+1)[2(2m+1)^2 - 1] - (2m+1) \\ &= 16m(m+1)(2m+1) + 2m+1 \end{aligned}$$

nhên $s_1 = 8(2m+1)$. Ta có công thức truy hồi của dãy số (s_i) là:

$$\begin{cases} s_0 = 0, s_1 = 8(2m+1), \\ s_{i+2} = [4(2m+1)^2 - 2]s_{i+1} - s_i + 8(2m+1), \quad i \geq 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra dãy số (s_i) có các số hạng chia hết cho $8(2m+1)$ với mọi $i = 0, 1, 2, \dots$ Hơn nữa, với cách đặt $x = 2m(m+1)n + (2m+1)$ thì dễ dàng thấy rằng n thỏa mãn đề bài khi và chỉ khi $n = s_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$ (do $s_0 = 0$ không phải là số nguyên dương). Vậy tất cả các giá trị n đều chia hết cho $8(2m+1)$. Đây chính là điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Ý thứ nhất của bài toán thực ra là một trường hợp đặc biệt và cũng là một sự dẫn dắt cho ý thứ hai. Ta có thể giải ý (1) theo cách ít tính toán hơn bằng nhận xét:

Nếu $x, y > 1$ là nghiệm của phương trình $2013x^2 - 2012y^2 = 1$ thì $t = y^2 - x^2 \in \mathbb{N}^*$ và các số $2012t + 1$, $2013t + 1$ đều chính phương. Hơn nữa, mỗi nghiệm (x, y) của phương trình $x^2 - 2012 \cdot 2013 \cdot y^2 = 1$ đều cho ta một nghiệm $(x + 2012y, x + 2013y)$ của phương trình $2013x^2 - 2012y^2 = 1$ nên dễ dàng suy ra kết quả cần chứng minh.

Cách tiếp cận bằng phương trình Pell hoàn toàn tự nhiên và khi đã xây dựng thành công thì ta chỉ còn cần thao tác trên các dãy số nguyên. Trong những năm gần đây, các bài toán về dãy số nguyên khá được ưa chuộng, đặc biệt dãy số nguyên liên quan đến công thức nghiệm của phương trình nghiệm nguyên. Chẳng hạn, bài dãy số trong đề TST 2012: Cho dãy số nguyên dương (x_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2011, \\ x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\frac{x_{2012} + 1}{2012}$ là số chính phương.

Trong việc giải quyết ý thứ hai, ta có thể lập luận như sau: Do $mn+1$ và $(m+1)n+1$ đều là các số chính phương nên ta có thể đặt $mn+1 = a^2$ và $(m+1)n+1 = b^2$. Từ đó ta có phương trình:

$$(m+1)a^2 - mb^2 = 1.$$

Đổi biến $a = x + my$, $b = x + (m+1)y$ để đưa về phương trình Pell liên kết là:

$$x^2 - m(m+1)y^2 = 1.$$

Cách giải này cũng hoàn toàn phù hợp nhưng chú ý rằng phương trình Pell tổng quát dạng $Ax^2 - By^2 = n$ nói chung có nhiều hơn một nghiệm cơ sở. Ta cần chứng minh trong trường hợp đặc biệt này ($A = B + 1$ và $n = 1$) thì nó chỉ có duy nhất một nghiệm cơ sở. Nếu không thì lời giải cũng thực sự vẫn còn thiếu sót.

Ngoài cách sử dụng phương trình Pell như trên, ta có thể lập luận như sau: Do:

$$\gcd(mm+1, mn+n+1) = 1,$$

nên ta cần có $(mn+1)(mn+n+1)$ là số chính phương hay tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$4m(m+1)n^2 + 4(2m+1)n + 4 = a^2,$$

tức ta phải có

$$[(2m+1)n+2]^2 = n^2 + a^2.$$

Ta chứng minh được rằng n phải là số chẵn và đây là phương trình Pythagore nên phải tồn tại các số nguyên dương p, q, k sao cho:

$$\begin{cases} n = 2kpq, \\ (2m+1)n+2 = k(p^2+q^2) \end{cases}$$

trong đó $k \mid (n, (2m+1)n+2) = 2$ nên $k = 1$ hoặc $k = 2$.

Nếu $k = 1$ thì dễ thấy $p^2 + q^2$ chẵn, suy ra p, q cùng tính chẵn lẻ. Nếu p, q cùng lẻ thì n chia 4 dư 2 và $(2m+1)n+2$ chia hết cho 4 trong khi $p^2 + q^2$ chia 4 dư 2, mâu thuẫn. Nếu p, q cùng chẵn thì n chia hết cho 4 dẫn đến $(2m+1)n+2$ chia 4 dư 2 trong khi $p^2 + q^2$ chia hết cho 4, cũng mâu thuẫn.

Nếu $k = 2$ thì $n = 4pq$ và $(2m+1)n+2 = 2(p^2+q^2)$, suy ra

$$p^2 + q^2 - 2(2m+1)pq - 1 = 0.$$

Đến đây ta chứng minh được (sử dụng phương pháp Viète Jumping) p, q là hai số hạng liên tiếp của dãy số $\{x_i\}$ được cho bởi công thức:

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2(2m+1), \\ x_{i+2} = 2(2m+1)x_{i+1} - x_i, \quad i \geq 1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra pq chia hết cho $2(2m+1)$ hay n chia hết cho $8(2m+1)$. Phương pháp xây dựng nghiệm ở đây có nét giống với bài 6 đề VMO 2012: Xét các số tự nhiên lẻ a, b mà a là ước số của $b^2 + 2$ và b là ước số của $a^2 + 2$. Chứng minh rằng a, b là các số hạng của dãy số tự nhiên $\{v_n\}$ xác định bởi $v_1 = v_2 = 1$ và $v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$.

Cách giải này có phần ngắn gọn hơn và xử lý nhẹ nhàng hơn cách đã nêu ở lời giải ban đầu nhưng để trình bày chặt chẽ không phải là điều đơn giản.

Bài 3. Với mỗi số n nguyên dương, đặt $S_n = \{0, 1, \dots, 2n+1\}$. Xét hàm số $f: (\mathbb{Z} \times S_n) \rightarrow [0, 1]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$(i) \quad f(x, 0) = f(x, 2n+1) = 0 \text{ với mọi số nguyên } x.$$

$$(ii) \quad f(x-1, y) + f(x+1, y) + f(x, y-1) + f(x, y+1) = 1 \text{ với } x, y \in \mathbb{Z} \text{ và } 1 \leq y \leq 2n.$$

Gọi F là tập hợp tất cả các hàm số f thỏa mãn.

(1) Chứng minh rằng $|F|$ là vô hạn.

(2) Với mỗi hàm số $f \in F$, đặt v_f là tập hợp ảnh của f . Chứng minh rằng $|v_f|$ hữu hạn.

(3) Tìm giá trị lớn nhất của $|v_f|$ với $f \in F$.

Lời giải. (1) Trong đẳng thức (ii) đã cho, ta thấy rằng

$$(x-1) - y \equiv (x+1) - y \equiv x - (y-1) \equiv x - (y+1) \pmod{2}.$$

Điều này có nghĩa là các giá trị của hàm $f(x, y)$ với x, y cùng tính chẵn lẻ và x, y khác tính chẵn lẻ là không có liên hệ với nhau. Ta sẽ tìm các xác định hàm f trong cả hai trường hợp.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ta xét một lưới nguyên nằm ngang có chiều cao là $2n+1$, chiều rộng vô hạn và điểm có tọa độ (i, j) sẽ được gán giá trị $f(i, j)$.

Điều kiện (i) được hiểu là tất cả các số thuộc hai biên (trên và dưới) của lưới đều gán số 0; còn các điểm nguyên bên trong lưới đều được gán giá trị thuộc $[0, 1]$.

Điều kiện (ii) chính là với mọi hình vuông con nằm nghiêng (các đường chéo song song với các trục tọa độ) có các đỉnh nguyên và cạnh là $\sqrt{2}$ đều có tổng các số gán cho các đỉnh bằng 1.

Với mỗi điểm có tọa độ A nguyên thuộc lưới nguyên đang xét, ta đặt $f_1(A), f_2(A)$ là giá trị gán cho các điểm có cùng tung độ với A , lần lượt có hoành độ lớn hơn và nhỏ hơn hoành độ của A đúng 2 đơn vị.

Tiếp tục, ta đặt $a_k = f(k, k)$ với $k = 1, 2, 3, \dots, 2n$ là giá trị gán cho điểm $A_k(k, k)$. Theo điều kiện xác định hàm số thì:

$$a_1 + a_2 + f_1(A_1) + 0 = 1 \Rightarrow f_1(A_1) = 1 - a_1 - a_2,$$

$$a_2 + a_3 + f_1(A_2) + f_1(A_1) = 1 \Rightarrow f_1(A_2) = a_1 - a_3,$$

.....,

$$a_{2n-1} + a_{2n} + f_1(A_{2n-2}) + f_1(A_{2n-1}) = 1 \Rightarrow f_1(A_{2n-1}) = a_1 - a_{2n},$$

$$a_{2n} + 0 + f_1(A_{2n-1}) + f_1(A_{2n}) = 1 \Rightarrow f_1(A_{2n}) = a_1.$$

Tương tự, ta cũng có

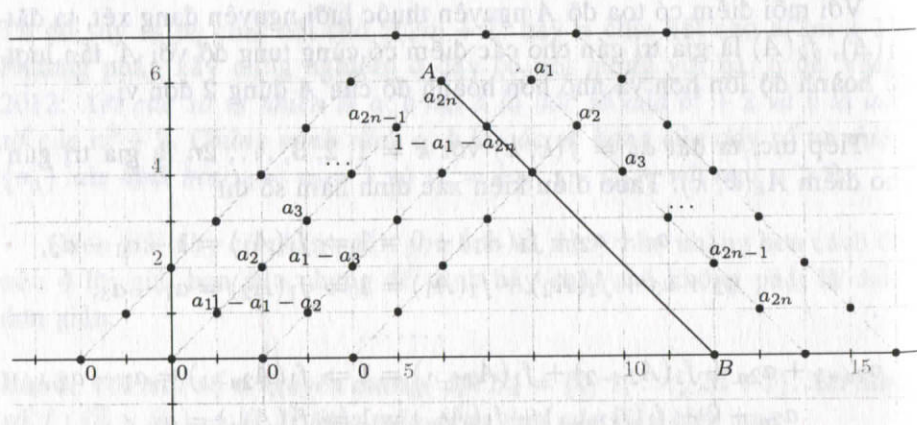
$$\begin{aligned} f_2(A_{2n}) &= 1 - a_{2n-1} - a_{2n}, \\ f_2(A_{2n-1}) &= a_{2n} - a_{2n-2}, \\ &\dots, \\ f_2(A_{2n-1}) &= 1 - a_1 - a_{2n}, \\ f_2(A_{2n}) &= a_{2n}. \end{aligned}$$

Từ đây ta thấy rằng nếu dãy a_k xác định thì các giá trị $f_1(A_k)$, $f_2(A_k)$ cũng hoàn toàn xác định. Ta sẽ chọn các giá trị a_k sao cho $f_1(A_k)$, $f_2(A_k)$ đều thuộc $[0, 1]$.

Ta chọn $a_1 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{2n-1}$, $a_2 \leq a_4 \leq \dots \leq a_{2n}$, $a_1 + a_{2n} \leq 1$ thì $f_1(A_k)$, $f_2(A_k) \in [0, 1]$. Hơn nữa, ta cũng thấy rằng:

$$\begin{aligned} f_1(A_1) &\geq f_1(A_3) \geq \dots \geq f_1(A_{2n-1}), \\ f_1(A_2) &\leq f_1(A_4) \leq \dots \leq f_1(A_{2n}), \\ f_1(A_1) + f_1(A_{2n}) &\leq 1, \\ f_2(A_1) &\geq f_2(A_3) \geq \dots \geq f_2(A_{2n-1}), \\ f_2(A_2) &\leq f_2(A_4) \leq \dots \leq f_2(A_{2n}), \\ f_2(A_1) + f_2(A_{2n}) &\leq 1. \end{aligned}$$

Do đó, tính đơn điệu của hai dãy con có chỉ số chẵn và lẻ vẫn được bảo toàn. Tương tự, từ dãy $f_1(A_k)$, ta xác định được $f_1(f_1(A_k))$ thỏa mãn, từ dãy $f_2(A_k)$, ta cũng xác định được $f_2(f_2(A_k))$ và cứ thế, tức là xây dựng được tất cả giá trị cho hàm số $f(x, y)$ trong trường hợp $x - y$ chẵn.



Tiếp tục đặt $b_k = f(k + 1, k)$ với $k = 1, 2, 3, \dots, 2n$ là giá trị gán cho điểm $B_k(k + 1, k)$ thì hoàn toàn tương tự như trên, ta xây dựng được tất cả các giá trị của $f(x, y)$ với $x - y$ lẻ.

Dễ thấy có vô số cách chọn dãy (a_k) , (b_k) thỏa mãn các điều kiện trên nên có vô số hàm f thỏa mãn đề bài, tức là $|F|$ vô hạn. Ta có điều phải chứng minh.

(2) Trong đẳng thức $f(x-1, y) + f(x+1, y) + f(x, y-1) + f(x, y+1) = 1$, ta thay x, y lần lượt bởi $x + 1, y + 1$ và thu được:

$$f(x, y + 1) + f(x + 2, y + 1) + f(x + 1, y) + f(x + 1, y + 2) = 1.$$

Từ đó suy ra

$$f(x - 1, y) + f(x, y - 1) = f(x + 1, y + 2) + f(x + 2, y + 1). \quad (*)$$

Như vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(1, 1) + f(2, 0) &= f(3, 3) + f(4, 2) \\ &= \dots \\ &= f(2n + 1, 2n + 1) + f(2n + 2, 2n) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} f(3, 1) + f(4, 0) &= f(5, 3) + f(6, 2) \\ &= \dots \\ &= f(2n + 3, 2n + 1) + f(2n + 4, 2n). \end{aligned}$$

Do đó $f(1, 1) = f(2n + 2, 2n)$, $f(3, 1) = f(2n + 4, 2n)$. Tương tự, ta có được:

$$f(2, 2) = f(2n + 2, 2n - 1), \quad f(4, 2) = f(2n + 5, 2n - 1).$$

Tiếp tục áp dụng nhiều lần đẳng thức $(*)$, suy ra

$$\begin{aligned} f(k, k) &= f(2n + 1 + k, 2n + 1 - k), \\ f(k + 2, k) &= f(2n + 3 + k, 2n + 1 - k). \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có

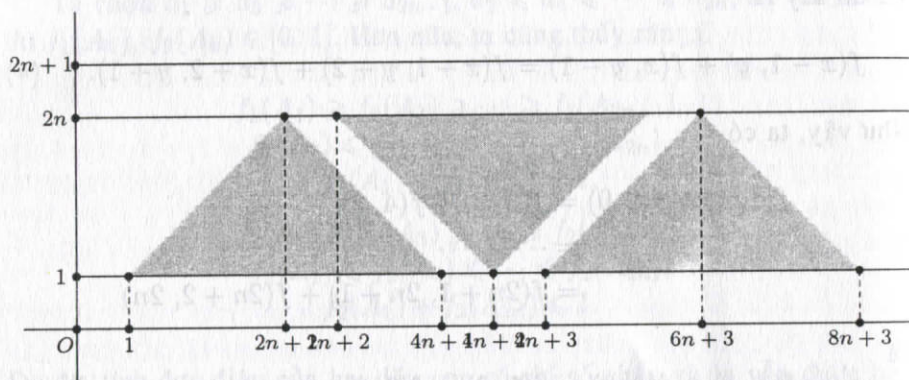
$$\begin{aligned} f(2n + k, 2n + 1 - k) &= f(4n + 2 + k, k), \\ f(2n + 3 + k, 2n + 1 - k) &= f(4n + 4 + k, k). \end{aligned}$$

Do đó, $f(k, k) = f(2n+1+k, 2n+1-k) = f(4n+2+k, k)$ với mọi $k = 1, 2, 3, \dots, 2n$ và như thế, bằng cách sử dụng quy nạp, ta có được:

$$f(k, k) = f((2n+1)i+k, 2n+1-k) = f((4n+2)i+k, k)$$

với $i \in \mathbb{Z}$ và $k = 1, 2, 3, \dots, 2n$.

Hơn nữa, sự xác định các giá trị trong đường chéo tiếp theo (nằm về phía phải) hoàn toàn giống nhau ở dải các điểm (k, k) và $((2n+1)i+k, 2n+1-k)$ nên các giá trị trên đó cũng tương ứng bằng nhau. Suy ra giá trị của f có sự tuần hoàn và được minh họa như hình bên dưới, tức là các giá trị của $f(x, y)$ với $x-y$ chẵn là sự lặp lại các giá trị được gán cho các điểm nguyên trong tam giác Ω có tọa độ các đỉnh $(1, 1)$, $(2n+1, 2n)$, $(4n+1, 1)$.



Tuy nhiên, các giá trị này là hữu hạn và ta tính được tổng cộng có không quá $\sum_{i=1}^{2n} i = n(2n+1)$ giá trị. Tương tự với giá trị của $f(x, y)$ mà $x-y$ lẻ, ta cũng có thêm không quá $n(2n+1)$ giá trị nữa. Kết hợp với 0, ta có $|v_f| \leq 2n(2n+1)+1$. Do đó, $|v_f|$ hữu hạn với mọi $f \in F$.

(3) Ta sẽ xây dựng một hàm số f có $|v_f| = 2n(2n+1)+1$ và chỉ ra đây chính là giá trị lớn nhất của $|v_f|$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng:

$$f(i+2k, i) = \frac{[1-(-1)^i][1-(-1)^k]}{4} + (-1)^k a_{k+i} - (-1)^{k+i} a_k$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, 2n$ và $k \in \mathbb{Z}$ mà $0 \leq k+i \leq 2n+1$. (**)

Thật vậy, với $k=0$ thì (**) hiển nhiên đúng. Giả sử (**) đúng với mọi (i, k) mà $k \leq m$ và $k = m+1, i \leq j$. Từ điều kiện (ii), ta có

$$f(j+1+2(m+1), j+1) + f(j+1+2m, j+1) + f(j+2(m+1), j) + f(j+2+2m, j+2) = 1.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta tính được

$$f(j+1+2(m+1), j+1) = \frac{[1-(-1)^{j+1}][1-(-1)^{m+1}]}{4} + (-1)^{m+1} a_{m+j+2} - (-1)^{m+j+2} a_{m+1}.$$

Suy ra (**) cũng đúng với $i = j+1, k = m+1$.

Như thế, các giá trị được gán cho các điểm trong tam giác Ω đều có dạng $\delta_{ij} \pm a_i \pm a_j$ với $\delta_{ij} \in \{0, 1\}$, trong đó giá trị δ_{ij} cũng như dấu của a_i, a_j xác định duy nhất theo i, j .

Tiếp theo, ta chọn $a_{2k-1} = \frac{1}{3^{2k-1}}, a_{2k} = \frac{1}{3^{2(n+1-k)}}$ với $k = 1, 2, \dots, n$ thì do trong hệ cơ số 3, một số nguyên bất kỳ có duy nhất một cách biểu diễn dưới dạng tổng $\sum_{i=0}^r \delta_i 3^i$ với $\delta_i \neq 0$ và $e_i \in \{-1, 0, 1\}$ nên suy ra tất cả các giá trị của $f(x, y)$ dùng để đánh số cho các điểm nằm trong tam giác Ω là đôi một phân biệt và khác 0, tức là có đúng $n(2n+1)$ giá trị như thế, tức là ta đã xây dựng được giá trị cho hàm số $f(x, y)$ với $x-y$ chẵn.

Tương tự, để xây dựng cho $f(x, y)$ với $x-y$ lẻ, ta chọn dãy số:

$$b_{2k-1} = \frac{1}{3^{2k-1}\sqrt{3}}, b_{2k} = \frac{1}{3^{2(n+1-k)}\sqrt{3}} \text{ với } k = 1, 2, \dots, 2n$$

thì các giá trị dạng $\delta'_{ij} \pm b_i \pm b_j$ cũng đôi một phân biệt và khác với các giá trị $\delta_{ij} \pm a_i \pm a_j$.

Từ đó, ta xây dựng được toàn bộ giá trị cho hàm số $f(x, y)$ và có tất cả $2n(2n+1)+1$ giá trị đôi một khác nhau. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm của $|v_f|$ trên miền F là $2n(2n+1)+1$. $\square$

Nhận xét. Đây là một bài toán đòi hỏi những kiến thức tổng hợp và một phong cách làm việc từ tốn, bài bản. Mô hình lưới hoặc bảng là một mô hình tự nhiên mà ta nghĩ đến, và hàm số có thể được xác định theo hàng, cột hoặc đường chéo.

Trong các bài toán có chứa tham số n , ta nên bắt đầu từ những giá trị n nhỏ để hình dung bài toán một cách tốt nhất, cụ thể nhất, từ đó tìm cách tiếp cận tổng quát. Nếu chọn cách này thì có lẽ câu (1) và (2), thậm chí cả phần chặn trên đúng ở câu (3) không phải là quá khó. Điểm khó ở câu (1) là cách xây dựng hàm phải thỏa mãn điều kiện $f(x, y) \in [0, 1]$.

Để có được điều này, ta phải tìm được một điều kiện có tính bất biến đối với dãy giá trị trên đường chéo (không chỉ để dãy kể nó thuộc $[0, 1]$, mà còn để các dãy tiếp theo cũng như thế).

Để làm câu (3), ta phải có những nhận xét tinh tế hơn, đòi hỏi nhiều thời gian hơn. Có lẽ câu này chỉ dành cho những bạn đã giải quyết tốt hai bài (1), (2) trong vòng 1.5-2 giờ, còn khá nhiều thời gian để tập trung toàn lực cho bài này. Ý tưởng cơ bản ở đây là dự đoán và chứng minh được công thức tổng quát của hàm dựa theo các phần tử thuộc một đường chéo. Từ công thức tổng quát này ta mới tìm cách chọn các "giá trị khởi tạo" để tất cả các giá trị nằm trong "tam giác tuần hoàn" đôi một khác nhau.

Để chọn các giá trị khác nhau, ta có một số định hướng cơ bản sau:

- Dùng bất đẳng thức.
- Dùng tính "độc lập tuyến tính" của các số vô tỷ, cụ thể là: Nếu $p_1, p_2, \dots, p_n$ là các số nguyên tố phân biệt thì không tồn tại các số hữu tỉ $c_1, c_2, \dots, c_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$c_1\sqrt{p_1} + c_2\sqrt{p_2} + \dots + c_n\sqrt{p_n} = 0.$$

Tuy nhiên, việc chứng minh bổ đề này là không đơn giản. Ta cũng có thể thay các số $\sqrt{p_i}$ này bằng các số vô tỷ khác dựa vào tính không đếm được của $\mathbb{R}$, nhưng đây cũng là kiến thức nằm ngoài khuôn khổ chương trình phổ thông.

Một cách tiếp cận thú vị và sơ cấp cho vấn đề này đã được trình bày ở trên là sử dụng tính chất của hệ đếm cơ số 3: Mọi số nguyên $N \neq 0$ bất kỳ đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$N = \varepsilon_i 3^i + \varepsilon_{i-1} 3^{i-1} + \dots + \varepsilon_0,$$

trong đó $\varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}, \forall j = 0, 1, \dots, i-1$.

Mệnh đề này có thể chứng minh khá dễ dàng bằng quy nạp Toán học.

Việc $f(x, y) \in [0, 1]$ không thành vấn đề vì ta có thể chia các giá trị khởi tạo cho một hằng số đủ lớn để đạt được điều này. Ngoài cách xây dựng theo đường chéo với $4n$ giá trị khởi tạo như trên ($2n$ cho trường hợp $f(x, y)$ mà $x-y$ chẵn và $2n$ cho trường hợp $f(x, y)$ mà $x-y$ lẻ), ta cũng có thể xây dựng theo hai cạnh dọc hoặc theo hai cạnh ngang có độ dài

2n. Chẳng hạn, trong trường hợp xây dựng theo cạnh dọc, song song với trục Oy , ta có thể làm như sau: Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng:

$$f(x, 2i) = i - [f(x-2i+1, 1) + f(x-2i+3, 1) + \dots + f(x+2i-1, 1)]$$

$$f(x, 2i+1) = [f(x-2i, 1) + f(x-2i+2, 1) + \dots + f(x, 1) + \dots + f(x+2i, 1)] - i.$$

Ta cần chọn $f(x, 1), x \in [-2n-1, 2n]$ sao cho:

- (i) $i-1 \leq f(x-2i+1, 1) + f(x-2i+3, 1) + \dots + f(x+2i-1, 1) \leq i$.
- (ii) $i \leq f(x-2i, 1) + f(x-2i+2, 1) + \dots + f(x, 1) + \dots + f(x+2i-2, 1) + f(x+2i, 1) \leq i+1$.
- (iii) Các giá trị $f(x, 1)$ là phân biệt với $x \in [-2n-1, 2n]$.
- (iv) $f(x, 2i+1) = f(x-2i, 1) + f(x-2i+2, 1) + \dots + f(x, 1) + \dots + f(x+2i-2, 1) + f(x+2i, 1) - i$ với $i = n$ thì luôn bằng n .

Từ đó đưa lên đường tròn và kết hợp với bất đẳng thức để chọn, tức là xét một số giá trị đủ nhỏ thích hợp để cho chúng đôi một phân biệt. Cách xây dựng cho trường hợp cạnh ngang cũng thực hiện tương tự.

Bài này nhắc ta nhớ đến một phương trình hàm tương tự xuất hiện trong kỳ thi chọn đội tuyển cách đây 10 năm, bài TST 2003: Cho hàm số $f: \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (i) $f(0, 0) = 5^{2003}, f(0, n) = 0$ với mọi n là số nguyên khác 0.

- (ii) $f(m, n) = f(m-1, n) - 2 \left\lfloor \frac{f(m-1, n)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{f(m-1, n-1)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{f(m-1, n+1)}{2} \right\rfloor$ với mọi số nguyên dương m và mọi số nguyên n .

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương M sao cho $f(M, n) = 1$ với mọi số nguyên n thỏa $|n| \leq \frac{5^{2003}-1}{2}$ và $f(M, n) = 0$ với mọi số nguyên n thỏa $|n| > \frac{5^{2003}-1}{2}$.

Tuy nhiên bài toán này lại là một câu chuyện khác!

Bài 4. Tìm hằng số k nguyên dương lớn nhất thỏa mãn: Với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$, ta đều có bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{k}{a+b+c+1} \geq \frac{k}{4} + 3. \quad (*)$$

Lời giải. Giả sử k là số nguyên dương sao cho bất đẳng thức đã cho đúng với mọi a, b, c mà $abc = 1$. Thay $a = b = x$ và $c = \frac{1}{x^2}$ với $0 < x \neq 1$ vào (*) và biến đổi, ta được

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2}{x} + \frac{k}{2x + \frac{1}{x^2} + 1} &\geq 3 + \frac{k}{4} \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{x} - 3 &\geq k \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2x^3 + x^2 + 1} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x+2)}{x} &\geq \frac{k(x-1)^2(2x+1)}{4(2x^3 + x^2 + 1)} \\ \Leftrightarrow \frac{k}{4} &\leq \frac{(x+2)(2x^3 + x^2 + 1)}{x(2x+1)} \\ \Leftrightarrow \frac{k}{4} &\leq x^2 + 2x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x+1}, \quad \forall x > 0, x \neq 1. \end{aligned}$$

Bây giờ, cho $x = \frac{2}{3}$, ta được $k \leq \frac{880}{63} < 14$. Hơn nữa, vì k là số nguyên dương nên từ đánh giá trên, ta có $k \leq 13$. Ta sẽ chứng minh rằng với $k = 13$ thì bất đẳng thức (*) đúng.

Thật vậy, với $k = 13$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{13}{a+b+c+1} \geq \frac{25}{4}. \quad (**)$$

Đặt:

$$f(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{13}{a+b+c+1}.$$

Không mất tính tổng quát, ta có giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, khi đó:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) &= \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{\sqrt{bc}} \right) + 13 \left(\frac{1}{a+b+c+1} - \frac{1}{a+2\sqrt{bc}+1} \right) \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \left[\frac{1}{bc} - \frac{13}{(a+b+c+1)(a+2\sqrt{bc}+1)} \right]. \end{aligned}$$

Do $a = \max\{a, b, c\}$ và giả thiết $abc = 1$ nên ta có $bc \leq 1$, suy ra $\frac{1}{bc} \geq 1$. Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM và biến đổi cho biểu thức trong ngoặc ở đẳng thức trên, ta có

$$\frac{13}{(a+b+c+1)(a+2\sqrt{bc}+1)} \leq \frac{13}{(3\sqrt[3]{abc}+1)(3\sqrt[3]{abc}+1)} = \frac{13}{16} < 1,$$

nên hiển nhiên $f(a, b, c) \geq f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc})$. Ta đưa được bài toán về chứng minh:

$$f\left(\frac{1}{x^2}, x, x\right) \geq \frac{25}{4} \text{ với } x = \sqrt{bc}, 0 < x \leq 1.$$

Nếu $x = 1$ thì bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức. Trong trường hợp $0 < x < 1$, bằng cách sử dụng lại các biến đổi đã thực hiện trong quá trình tìm điều kiện cần cho k , ta thấy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)(2x^3 + x^2 + 1)}{x(2x+1)} &\geq \frac{13}{4} \\ \Leftrightarrow 4(x+2)(2x^3 + x^2 + 1) &\geq 13x(2x+1) \\ \Leftrightarrow 4(2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 2) &\geq 26x^2 + 13x \\ \Leftrightarrow 8x^4 + 20x^3 - 18x^2 - 9x + 8 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} 8x^4 + 20x^3 - 18x^2 - 9x + 8 &= (8x^4 - 8x^2 + 2) + (20x^3 - 20x^2 + 5x) + (10x^2 - 14x + 6) \\ &= 2(2x^2 - 1)^2 + 5x(2x - 1)^2 + 2(5x^2 - 7x + 3) > 0 \end{aligned}$$

do $2(2x^2 - 1)^2 \geq 0$, $5x(2x - 1)^2 \geq 0$ và $5x^2 - 7x + 3 > 0$ (tam thức bậc hai có hệ số cao nhất dương và biệt thức $\Delta = -11 < 0$). Như vậy, bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Ta đi đến kết luận cuối cùng $k = 13$ là giá trị cần tìm. $\square$

Nhận xét. Bài toán này có dạng phát biểu khá giống với các bài toán tìm hằng số tốt thông thường nên rất tự nhiên, ta nghĩ đến lối tiếp cận tương tự như các dạng toán này: *Tìm một bộ số thích hợp thay vào để dự đoán điều kiện cần cho k rồi sau đó đi chứng minh đó cũng là điều kiện đủ.*

Do bất đẳng thức có dạng đối xứng nên ta nghĩ đến việc chọn một bộ số mà ở đó có hai biến nhận giá trị bằng nhau. Điều này lý giải cho việc chọn $a = b = x$ và $c = \frac{1}{x^2}$ như trong lời giải ở trên. Một cách khác để chứng minh bất đẳng thức (**) dùng phương pháp dồn biến như sau: Biến đổi (**) về dạng đa thức

$$(ab + bc + ca)(a + b + c + 1) + 13 \geq \frac{25}{4}(a + b + c).$$

Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$ thì $a \geq 1$ và đặt $x = b + c$ thì bất đẳng thức trên có thể viết lại thành:

$$(ax + bc)(a + x + 1) + 13 \geq \frac{25}{4}(a + x).$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$ax^2 + \left(bc + a^2 + a - \frac{25}{4}\right)x + 14 - \frac{25a}{4} \geq 0,$$

hay

$$a \left(x + \frac{bc + a^2 - \frac{25}{4}}{2a} \right)^2 - \frac{(bc + a^2 + a - \frac{25}{4})^2}{2a} + 14 - \frac{25a}{4} \geq 0.$$

Do $x = b + c \geq 2\sqrt{bc} = \frac{2}{\sqrt{a}}$ nên:

$$x + \frac{bc + a^2 - \frac{25}{4}}{2a} \geq \frac{2a \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} + bc + a^2 - \frac{25}{4}}{2a} = \frac{4\sqrt{a} + \frac{1}{a} + a + a^2 - \frac{25}{4}}{2a} > 0.$$

Ta đưa về chứng minh:

$$a \left(\frac{4\sqrt{a} + \frac{1}{a} + a + a^2 - \frac{25}{4}}{2a} \right)^2 - \frac{(\frac{1}{a} + a^2 + a - \frac{25}{4})^2}{2a} + 14 - \frac{25a}{4} \geq 0.$$

Đặt $\sqrt{a} = t \geq 0$ thì ta đưa về:

$$t^2 \left(\frac{4t + \frac{1}{t^2} + t^2 + t^4 - \frac{25}{4}}{2t^2} \right)^2 - \frac{(\frac{1}{t^2} + t^4 + t^2 - \frac{25}{4})^2}{2t^2} + 14 - \frac{25t^2}{4} \geq 0,$$

hay

$$(t - 1)^2(8t^4 - 9t^3 - 18t^2 + 20t + 8) \geq 0.$$

Đặt $t = \frac{1}{u}$ thì ta đưa được về bất đẳng thức đã đề cập trong cách ban đầu.

Ta cũng có thể chứng minh bất đẳng thức (**) mà không dùng đến dồn biến như sau: Do $abc = 1$ nên tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho $a = \frac{x^2}{yz}$, $b = \frac{y^2}{zx}$, $c = \frac{z^2}{xy}$, ta cần chứng minh rằng:

$$\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} + \frac{13xyz}{x^3 + y^3 + z^3 + xyz} \geq 3 + \frac{13}{4}.$$

Do x, y, z bình đẳng nên ta có thể giả sử $x \leq y \leq z$. Viết bất đẳng thức trên thành dạng tương đương:

$$\frac{x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 - 3x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2} \geq \frac{13(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)}{4(x^3 + y^3 + z^3 + xyz)}.$$

Ta có các biến đổi, đánh giá

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \left[(x - y)^2 + (z - x)(z - y) \right]$$

và:

$$\begin{aligned} x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 - 3x^2y^2z^2 &= (xy + yz + zx) \left[z^2(x - y)^2 + xy(z - x)(z - y) \right] \\ &\geq xy(xy + yz + zx) \left[(x - y)^2 + (z - x)(z - y) \right]. \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} \frac{xy(xy + yz + zx) \left[(x - y)^2 + (z - x)(z - y) \right]}{xyz^2} &\geq \frac{13(x + y + z) \left[(x - y)^2 + (z - x)(z - y) \right]}{4(x^3 + y^3 + z^3 + xyz)}. \end{aligned}$$

Để chứng minh kết quả này, ta chỉ cần chứng minh được:

$$4(xy + yz + zx)(x^3 + y^3 + z^3 + xyz) \geq 13xyz^2(x + y + z).$$

Do tính thuần nhất nên ta có thể giả sử $x + y = 2$ thì dẫn đến

$$x^3 + y^3 \geq 2 \left(\frac{x + y}{2} \right)^3 = 2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} (xy + yz + zx)(x^3 + y^3 + z^3 + xyz) &\geq (xy + 2z)(2 + z^3 + xyz) > xy(2 + z^3) + 2z(2 + z^3 + xyz). \end{aligned}$$

Ta đưa bài toán về chứng minh:

$$\begin{aligned} 4xy(2 + z^3) + 8z(2 + z^3 + xyz) &\geq 13xyz^2(z + 2) \\ \Leftrightarrow 8z(2 + z^3) &\geq xy(9z^3 + 18z^2 - 8) \\ \Leftrightarrow 8z^4 - 9z^3 - 18z^2 + 16z + 8 + (1 - xy)(9z^3 + 18z^2 - 8) &\geq 0. \end{aligned}$$

Chú ý rằng $xy \leq 1$ và $z \geq 1$ nên $(1 - xy)(9z^3 + 18z^2 - 8) \geq 0$; tiếp tục đặt $z = 1 + t$ với $t \geq 0$ và thay vào:

$$8z^4 - 9z^3 - 18z^2 + 16z + 8 = 8t^4 + 23t^3 + 3t^2 - 15t + 5 \text{ với } t \geq 0.$$

Dễ dàng chứng minh được biểu thức này không âm nên bất đẳng thức cần chứng minh ở trên là đúng. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ta thấy rằng việc xử lý bất đẳng thức (**) không quá khó nhưng vấn đề là tại sao lại nghĩ ra cách chọn $b = c = \frac{2}{3}$, $a = \frac{9}{4}$ để có được $k < 14$. Điểm tinh tế và cũng là khó nhất của bài toán chính là ở đây.

Trong bất đẳng thức đã cho, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ nên ta dự đoán là giảm số biến bằng cách đặt $a = 1$, $b = x$, $c = \frac{1}{x}$ thì thu được ngay $k \leq 4(x + \frac{1}{x} + 2)$, tiếp tục cho $x \rightarrow 1$ thì có $k \leq 16$. Tuy nhiên điều kiện này còn chưa chặt! Ta tiếp tục cho $b = c = \frac{1}{x}$, $a = x^2$ thì thay vào bất đẳng thức ban đầu, ta được

$$\begin{aligned} k &\leq \frac{4(2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 2)}{2x^2 + x} \\ &= \frac{4(x + 2)(2x^3 + x^2 + 1)}{2x^2 + x} \\ &= f(x), \text{ với } x > 0. \end{aligned} \quad (***)$$

Khi đó, ta phải có $k \leq \min_{x>0} f(x)$. Dưới đây ta sẽ phân tích một số cách để từ (***) có thể suy ra $k < 14$.

(1) Ta có $f'(x) = 0$ tương đương với một phương trình bậc 5:

$$g(x) = 4x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 4x - 1 = 0.$$

Ta không giải được phương trình này, vì thế không thể tìm được chặn trên chính xác cho k . Tuy nhiên, do bài toán yêu cầu tìm k nguyên dương lớn nhất, nên ta cũng không cần đi tìm giá trị min, mà chỉ đánh giá nó nhằm tìm ra một chặn trên cho k . Chú ý phương trình $g(x) = 0$ có thể viết dưới dạng:

$$4x^2 + 8x + 5 = \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

Trên miền $(0, +\infty)$ thì vế trái là hàm tăng, vế phải là hàm giảm nên phương trình $g(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm dương. Chú ý rằng $g(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4} < 0$, $g(1) = 12 > 0$ nên nghiệm x_0 của phương trình này nằm

giữa $\frac{1}{2}$ và 1. Ta không có ý định đi tìm x_0 mà thông tin này chỉ dùng để có định hướng cho việc chọn các giá trị của x để thay vào bất đẳng thức:

$$\frac{4(x + 2)(2x^3 + x^2 + 1)}{2x^2 + x} \geq k.$$

Ta thay các giá trị đặc biệt nằm trong $[\frac{1}{2}, 1]$.

• Thay $x = 1$, ta được $k \leq 16$.

• Thay $x = \frac{1}{2}$, ta được $k \leq 15$.

• Thay $x = \frac{2}{3}$, ta được $k \leq 13.98$.

• Thay $x = \frac{3}{4}$, ta được $k \leq 14.2$.

Đến đây, ta chỉ ra được $k < 14$.

(2) Do $f(x)$ có dạng khá cồng kềnh nên nếu để nguyên như vậy mà khảo sát thì sẽ khá phức tạp. Do đó, ta nghĩ đến việc biến đổi $f(x)$ về dạng đơn giản hơn để dễ tính đạo hàm và vì $f(x)$ có dạng phân thức nên ta nghĩ đến việc tách và chia đa thức:

$$f(x) = 4 \left(x^2 + 2x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x+1} \right).$$

Đến đây thì việc lấy đạo hàm đã trở nên khá dễ dàng, ta tính được

$$f'(x) = 8 \left[x + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{(2x+1)^2} \right].$$

Ta cần giải phương trình $f'(x) = 0$. Quan sát một chút, ta phát hiện được:

$$x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2}, \quad 1 + \frac{3}{(2x+1)^2} = \frac{4(x^2 + x + 1)}{(2x+1)^2}.$$

Như vậy, ta có thể phân tích được nhân tử:

$$f'(x) = 8(x^2 + x + 1) \left[\frac{x-1}{x^2} + \frac{4}{(2x+1)^2} \right],$$

từ đó ta đưa được việc xét $f'(x) = 0$ về xét một phương trình đơn giản hơn:

$$\frac{x-1}{x^2} + \frac{4}{(2x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Đến đây, ta gặp phải một khó khăn khá lớn, đó là phương trình $4x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$ không có “nghiệm đẹp”. Khi khảo sát một phương trình, ta quan tâm đến hai việc: phương trình đó có bao nhiêu nghiệm và đó là những giá trị nào. Việc thứ nhất có thể dễ dàng thực hiện bằng cách viết lại phương trình dưới dạng:

$$4x^2 + 4x - 3 - \frac{1}{x} = 0.$$

Vế trái của phương trình trên là một hàm liên tục và đồng biến với mọi $x > 0$, đồng thời bằng kiểm tra trực tiếp ta dễ thấy phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(0, 1)$ nên bằng cách kết hợp hai điều này lại, ta có thể khẳng định phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc $(0, 1)$.

Việc thứ hai thực sự rất khó khăn trong trường hợp của bài toán này. Rõ ràng với việc chỉ bằng tính tay, ta rất khó tính được giá trị chính xác nghiệm của phương trình $4x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$. Vả lại, nếu tính được thì chắc chắn trong công thức nghiệm sẽ có căn thức chằng chịt và khi thay vào $f(x)$, ta sẽ rất khó để đánh giá xấp xỉ sang dạng thập phân để từ đó đưa ra nhận định về k . Có vẻ như ta đang đi vào ngõ cụt... Tuy nhiên, các bạn hãy chú ý rằng ta đang cần tìm giá trị nguyên dương lớn nhất của k , do đó ta hoàn toàn không cần phải tính ra đúng giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ làm gì. Thay vào đó, ta có thể nghĩ đến việc tìm một giá trị “sát” với giá trị nhỏ nhất đó cũng được. Muốn vậy, ta cần tìm một giá trị x sát với nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ để thay vào tính toán. Từ nhu cầu mới này, ta nghĩ đến việc đánh giá chặn miền cho nghiệm của phương trình $4x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$. Gọi $x_0 \in (0, 1)$ là nghiệm của phương trình. Ý tưởng của ta là làm sao khử được dạng bậc ba để có được một phương trình bậc thấp có thể giải được nhanh chóng bằng tính tay. Đầu tiên ta có để ý rằng với $x_0 \in (0, 1)$ thì $4x_0^3 < 4x_0^2$, do đó:

$$8x_0^2 - 3x_0 - 1 > 4x_0^3 + 4x_0^2 - 3x_0 - 1 = 0.$$

Từ đây, ta tìm được chặn dưới cho x_0 là $x_0 > \frac{3 + \sqrt{41}}{16} > \frac{1}{2}$. Tiếp theo, ta sẽ tìm chặn trên cho x_0 . Bằng chú ý nhỏ rằng với $x_0 \in (0, 1)$ thì các lũy thừa của nó khá nhỏ và “xấp xỉ” với nhau nên để khử bậc ba, ta mạnh dạn sử dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$\begin{aligned} 0 &= 4x_0^3 + 4x_0^2 - 3x_0 - 1 = (4x_0^3 + x_0) + 4x_0^2 - 4x_0 - 1 \\ &> 4x_0^2 + 4x_0^2 - 4x_0 - 1 = 8x_0^2 - 4x_0 - 1. \end{aligned}$$

Từ đây, ta tìm được chặn trên cho x_0 là $x_0 < \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$. Như vậy $\frac{3 + \sqrt{41}}{16} < x_0 < \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$. Vì các đánh giá khá sát nên ta mạnh dạn chọn $x_1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$ để thay vào $f(x)$. Để ý rằng x_1 là nghiệm của $8x_1^2 - 4x_1 - 1 = 0$, do đó:

$$x_1^2 = \frac{4x_1 + 1}{8}, \quad \frac{1}{x_1} = 8x_1 - 4, \quad \frac{3}{2x_1 + 1} = 4 - 4x_1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(x_1) &= 4 \left[\frac{4x_1 + 1}{8} + 2x_1 + 2(8x_1 - 4) - (4 - 4x_1) \right] \\ &= 90x_1 - \frac{95}{2} = 90 \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{4} - \frac{95}{2} = \frac{45\sqrt{3} - 50}{2}. \end{aligned}$$

Với kết quả này, ta thu được $k \leq \frac{45\sqrt{3} - 50}{2} = 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 25 \approx 45 \cdot 0.866 - 25 = 13.97$. Tất nhiên, cũng có thể lựa chọn một giá trị nào đó đẹp hơn cho x để thuận tiện hơn nữa cho việc tính toán nhưng ở đây ta nên thận trọng vì chỉ cần chọn một số x lệch hơi xa so với x_0 thôi là có thể đưa đến việc k sẽ bị lệch đi mấy đơn vị sang 14, 15 thậm chí là 16. Tốt nhất, ta vẫn cứ nên sử dụng giá trị nào đó mà ta đã biết chắc rằng nó “sát” với x_0 dù lẻ một chút cũng không sao, bù lại ta sẽ có thể yên tâm hơn về kết quả.

Sau khi đã tìm được $k \leq 13$, ta có thể thử đi chứng minh bất đẳng thức đúng với $k = 13$ bằng nhiều cách nhưng vì độ chặt của bất đẳng thức (k là hằng số tốt nhất) nên tất nhiên ta sẽ chọn giải pháp nào an toàn mà hiệu quả nhất và phương pháp mà ta chọn ở đây là làm giảm số biến bằng dồn biến.

Cuối cùng, ta sẽ chỉ ra một cách để tìm hằng số thực k rất gần với hằng số tốt nhất của (*). Đặt:

$$F(x) = 4(2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 2) - k(2x^2 + 2) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Vì với hằng số tốt nhất thì điểm cực tiểu x_0 của đa thức gần với $\frac{2}{3}$ nên ta giả sử rằng với k cần tìm thì điểm cực tiểu x_0 bằng đúng $\frac{2}{3}$, tức là đạo hàm $F'(x) = 32x^3 + 60x^2 + 16x + 4 - k(4x + 1)$ bằng 0 tại $x = \frac{2}{3}$, ta tính được $k = \frac{1372}{99}$. Với giá trị k này thì $F(x)$ đạt được cực tiểu tại $\frac{2}{3}$ nên:

$$F(x) \geq F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{152}{891} > 0.$$

Do đó, bất đẳng thức (*) đúng với $k = \frac{1372}{99} \approx 13.85859$. Chú ý rằng với $k \leq k_1 = \frac{880}{63} \approx 13.96825$ và với $k_2 = 13.85859$ thì (*) cũng đúng nên hằng số thực tốt nhất k thỏa mãn $k_2 \leq k \leq k_1$ (ta tính được $k \approx 13.96764$). Một điều thú vị ở đây là dù k_2 đủ lớn hơn 13 khá nhiều nhưng bất đẳng thức trong trường hợp tương ứng lại dễ chứng minh hơn.

Nhận xét chung, bài toán này có hình thức khá đơn giản nhưng lại đòi hỏi nhiều xử lý trung gian tinh tế, nhất là phần tính toán trong điều kiện thời gian có giới hạn và không có máy tính hỗ trợ. Nhiều bạn chủ quan khi gặp bài này, đánh giá k vội vàng để ra $k = 8$ hoặc $k = 16$ rồi từ đó “kết luận” luôn và để mất điểm đáng tiếc. Một suy nghĩ thường thấy là việc chứng minh bất đẳng thức một biến là chuyện đơn giản (các bài dồn biến thường đưa về các bất đẳng thức một biến hiển nhiên đúng) nhưng thực ra không phải vậy; cũng như các phương trình đại số, bất đẳng thức một biến cũng có thể khó và thậm chí là rất khó nếu như trong quá trình xử lý, chúng ta không thu được nghiệm đặc biệt nào.

Có hai bài toán có cách giải khá giống với bài 4 (phần chứng minh), tuy nhiên đơn giản hơn. Có lẽ bài toán 4 được phát triển từ các bài toán dưới đây[§]:

(1) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) + 7 \geq 5(a+b+c).$$

(2) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3} \geq \frac{3}{ab+bc+ca}.$$

Bài 5. Cho tam giác ABC nhọn không cân có góc A bằng 45° . Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P . Gọi I là trung điểm của BC ; đường thẳng IF cắt PH tại Q .

(1) Chứng minh rằng $\widehat{IQH} = \widehat{AIE}$.

(2) Gọi K là trực tâm của tam giác AEF và (J) là đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD . Đường thẳng CK cắt đường tròn (J) tại G , đường thẳng IG cắt đường tròn (J) tại M . Đường thẳng JC cắt đường tròn đường kính BC tại N . Chứng minh rằng các điểm G, M, N, C cùng nằm trên một đường tròn.

[§]Hai bài toán 50 và 55 trong chương 1 cuốn sách *Algebraic Inequalities* của Vasile Cirtoaje.

Lời giải. (1) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $AB < AC$, khi đó B sẽ nằm giữa P, C . Trường hợp $AB > AC$ được chứng minh hoàn toàn tương tự.

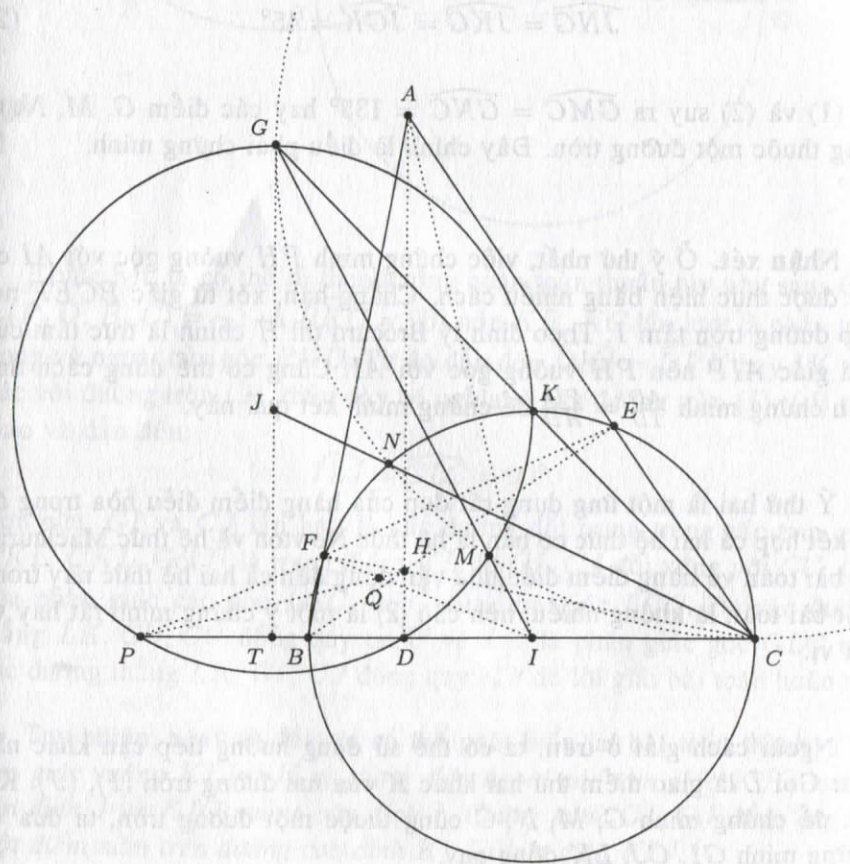
Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng $PH \perp AI$. Thật vậy, gọi U, V lần lượt là trung điểm của AH, IH thì ta có $UV \parallel AI$. Dễ thấy $(P, D, B, C) = -1$ nên theo tính chất của hàng điểm điều hòa thì:

$$PB \cdot PC = PD \cdot PI.$$

Ta cũng có $PE \cdot PF = PB \cdot PC$ nên $PE \cdot PF = PD \cdot PI$ hay P nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính AH (tâm U) và IH (tâm V). Hơn nữa H cũng nằm trên trục đẳng phương của 2 đường tròn này nên $PH \perp UV$. Do đó $PH \perp AI$. Vì $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nên $\widehat{EIF} = 90^\circ$, suy ra

$$\widehat{IQH} = 90^\circ - \widehat{AIF} = \widehat{EIF} - \widehat{AIF} = \widehat{AIE}.$$

Vậy ta có $\widehat{IQH} = \widehat{AIE}$.



(2) Ta thấy rằng $\widehat{EKF} + \widehat{ECF} = \widehat{EKF} + \widehat{EAF} = 180^\circ$ nên K thuộc đường tròn đường kính BC . Do hàng điểm D, P, B, C điều hòa nên ta có $ID \cdot IP = IC^2$, mà $IM \cdot IG = ID \cdot IP$ (cùng bằng phương tích của I đến (J)) nên $IM \cdot IG = IC^2$ hay $\triangle IMC \sim \triangle ICG$ (c-g-c) nên:

$$\widehat{IMC} = \widehat{ICG} = \widehat{ICK} = 45^\circ. \quad (1)$$

Gọi T là trung điểm PD thì theo hệ thức Maclaurin, ta có $CB \cdot CT = CD \cdot CP = CK \cdot CG$ hay tứ giác $GTBK$ nội tiếp và do $\widehat{BKG} = 90^\circ$ nên cũng có $\widehat{GTD} = 90^\circ$ hay $GT \perp PD$.

Tam giác JPD cân tại J và có T là trung điểm PD nên $JT \perp PD$. Do đó, G, J, T thẳng hàng và $\widehat{KGJ} = 45^\circ$. Mặt khác, $CN \cdot CJ = CB \cdot CT = CK \cdot CG$ nên tứ giác $KNJG$ nội tiếp và dẫn đến:

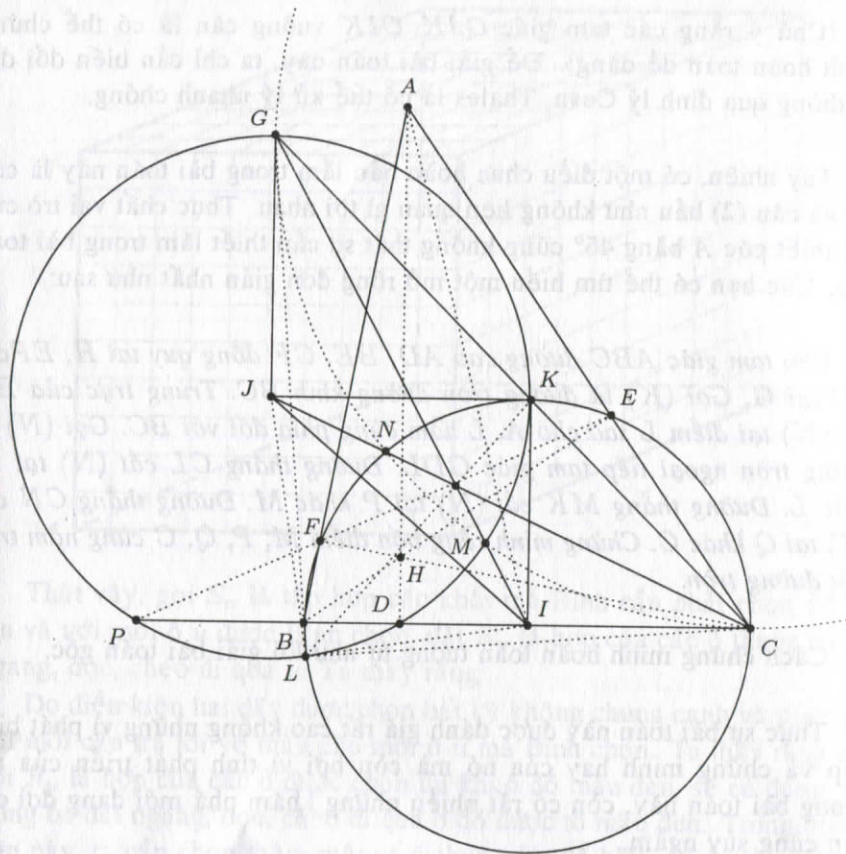
$$\widehat{JNG} = \widehat{JKG} = \widehat{JGK} = 45^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{GMC} = \widehat{GNC} = 135^\circ$ hay các điểm G, M, N, C cùng thuộc một đường tròn. Đây chính là điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Ở ý thứ nhất, việc chứng minh PH vuông góc với AI có thể được thực hiện bằng nhiều cách. Chẳng hạn, xét tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn tâm I . Theo định lý Brocard thì H chính là trực tâm của tam giác AIP nên PH vuông góc với AI . Cũng có thể dùng cách tính toán chứng minh $\frac{AD}{ID} = \frac{PD}{HD}$ để chứng minh kết quả này.

Ý thứ hai là một ứng dụng rất đẹp của hàng điểm điều hòa trong đó có kết hợp cả hai hệ thức cơ bản là hệ thức Newton và hệ thức Maclaurin. Số bài toán về hàng điểm điều hòa vận dụng đến cả hai hệ thức này trong một bài toán là không nhiều, nên câu (2) là một ý chứng minh rất hay và thú vị.

Ngoài cách giải ở trên, ta có thể sử dụng hướng tiếp cận khác như sau: Gọi L là giao điểm thứ hai khác K của hai đường tròn $(I), (J)$. Khi đó, để chứng minh G, M, N, C cùng thuộc một đường tròn, ta đưa về chứng minh GI, CJ, LK đồng quy.



Trước hết, ta có thể đi theo hướng hoàn toàn thuần túy như sau: Chú ý $(P, D, B, C) = -1$ và $\widehat{BKC} = 90^\circ$ nên KB, KC lần lượt là phân giác trong và ngoài của góc PKD . Từ đó dẫn đến $\widehat{DKI} = \widehat{DPK}$ hay IK tiếp xúc với đường tròn (J) , điều này có nghĩa là các đường tròn $(I), (J)$ trực giao và dẫn đến:

$$\widehat{ILJ} = \widehat{GLC} = 90^\circ.$$

Hơn nữa, GI và CJ lần lượt là các đường đối trung trong các tam giác GKL, CKL . Gọi U là trung điểm KL thì GI, CJ đối xứng với GU, CU qua phân giác các góc $\widehat{LGC}, \widehat{LCG}$ của tam giác LGC . Do các đường thẳng LK, GU, CU đồng quy tại U và LK là phân giác góc GLC nên các đường thẳng LK, GI, CJ đồng quy. Từ đó lời giải bài toán hoàn tất.

Tuy nhiên, ngay từ đầu, ta có thể phát biểu lại bài toán thành: Cho tam giác vuông KIJ ở K và dựng phía ngoài các tam giác KJG vuông cân đỉnh J và KIC vuông cân đỉnh I . Chứng minh GI, CJ đồng quy tại một điểm nằm trên đường cao đỉnh K của tam giác KIJ .

(Chú ý rằng các tam giác GJK , CIK vuông cân là có thể chứng minh hoàn toàn dễ dàng). Để giải bài toán này, ta chỉ cần biến đổi đại số thông qua định lý Ceva, Thales là có thể xử lý nhanh chóng.

Tuy nhiên, có một điều chưa hoàn hảo lắm trong bài toán này là câu (1) và câu (2) hầu như không liên quan gì tới nhau. Thực chất vai trò của giả thiết góc A bằng 45° cũng không thật sự cần thiết lắm trong bài toán này. Các bạn có thể tìm hiểu một mở rộng đơn giản nhất như sau:

Cho tam giác ABC đường cao AD , BE , CF đồng quy tại H , EF cắt BC tại G . Gọi (K) là đường tròn đường kính BC . Trung trực của BC cắt (K) tại điểm L sao cho A, L nằm cùng phía đối với BC . Gọi (N) là đường tròn ngoại tiếp tam giác GDL . Đường thẳng CL cắt (N) tại M khác L . Đường thẳng MK cắt (N) tại P khác M . Đường thẳng CN cắt (K) tại Q khác C . Chứng minh rằng bốn điểm M, P, Q, C cùng nằm trên một đường tròn.

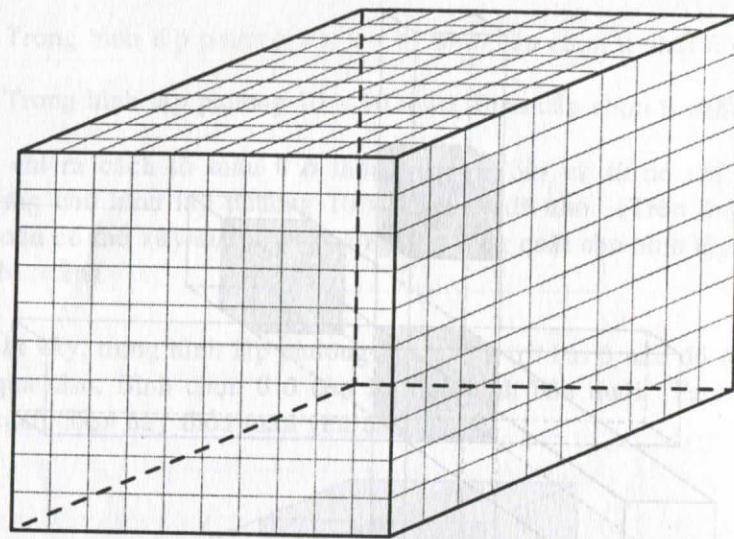
Cách chứng minh hoàn toàn tương tự như lời giải bài toán gốc.

Thực sự bài toán này được đánh giá rất cao không những vì phát biểu đẹp và chứng minh hay của nó mà còn bởi vì tính phát triển của nó. Trong bài toán này, còn có rất nhiều những khám phá mới đang đợi các bạn cùng suy ngẫm.

Bài 6. Cho một khối lập phương $10 \times 10 \times 10$ gồm 1000 ô vuông đơn vị màu trắng. An và Bình chơi một trò chơi. An chọn một số dải $1 \times 1 \times 10$ sao cho hai dải bất kỳ không có chung đỉnh hoặc cạnh rồi đổi tất cả các ô sang màu đen. Bình thì được chọn một số ô bất kỳ của hình lập phương rồi hỏi An các ô này màu gì. Hỏi Bình phải chọn ít nhất bao nhiêu ô để với mọi câu trả lời của An thì Bình luôn xác định được những ô nào là màu đen?

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh nhận xét tổng quát:

Cho một khối lập phương $2n \times 2n \times 2n$ gồm $8n^3$ ô vuông đơn vị màu trắng. An và Bình chơi một trò chơi. An chọn một số dải $1 \times 1 \times n$ sao cho với hai dải bất kỳ thì chúng không có chung đỉnh hoặc cạnh rồi đổi tất cả các ô sang màu đen. Bình thì được chọn một số ô bất kỳ của hình lập phương rồi hỏi An các ô này có màu gì. Khi đó, Bình cần chọn ít nhất $6n^2$ ô mới có thể xác định được ô nào có màu đen.

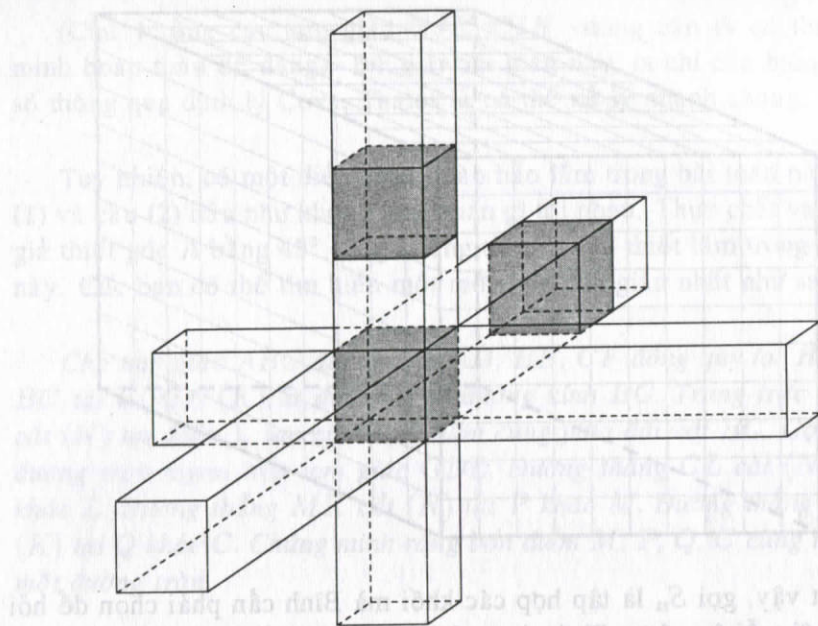


Thật vậy, gọi S_n là tập hợp các khối mà Bình cần phải chọn để hỏi An và với mỗi ô u được Bình chọn, đặt R_u là hợp của các ô thuộc ba dải ngang, dọc, chéo đi qua u . Ta thấy rằng:

Do điều kiện hai dải được chọn bất kỳ không chung cạnh và đỉnh nên với mỗi câu trả lời về màu cho mỗi ô u mà Bình chọn. Ta thấy rằng nếu gọi R_u là hợp của các ô được chọn thì khi ô đó màu đen, sẽ có đúng một trong ba dải ngang, dọc, chéo đi qua ô đó được tô màu đen. Trong trường hợp này, ta cần chọn thêm một số ô thuộc R_u để biết chính xác dải đó.

Nếu chỉ chọn thêm một ô thôi thì khi An trả lời ô đó màu trắng, Bình sẽ không xác định được dải nào trong hai dải còn lại được tô đen. Do đó, Bình phải chọn thêm ít nhất hai ô nữa trong R_u mới có khả năng trả lời được. Thêm vào đó, hai ô đó phải thuộc hai dải khác nhau vì nếu chúng cùng thuộc một dải thì cũng tương tự như trường hợp chọn một ô nêu trên. Với nhận xét này, ta gán cho mỗi ô u của hình lập phương một bộ số (a, b, c) với định nghĩa như sau:

- $a = 2$ nếu dải hình hộp theo chiều ngang đi qua u không có thêm điểm nào thuộc S_n và $a = 1$ nếu ngược lại.
- $b = 2$ nếu dải hình hộp theo chiều dọc đi qua u không có thêm điểm nào thuộc S_n và $b = 1$ nếu ngược lại.
- $c = 2$ nếu dải hình hộp theo chiều chéo đi qua u không có thêm điểm nào thuộc S_n và $c = 1$ nếu ngược lại.



Khi đó, có hai trong ba số a, b, c có giá trị bằng 1 và số còn lại không vượt quá 2 nên:

$$a + b + c \leq 4.$$

Đặt T là tổng các số dùng để gán cho các ô của hình lập phương. Khi đó, ta có

$$T = \sum_{u \in S_n} (a + b + c) \leq 4|S_n|.$$

Mặt khác, với mỗi dãy $1 \times 1 \times n$ của khối lập phương (theo cả ba chiều) đều có ít nhất một khối thuộc tập hợp S_n vì nếu không, Bình sẽ không có thông tin gì về dãy đó và trong trường hợp An trả lời rằng tất cả các ô được Bình chọn đều được tô màu trắng thì Bình sẽ không biết được dãy còn lại đó có được tô màu đen hay không.

Để thấy rằng có tất cả $(2n)^2$ dãy $1 \times 1 \times 2n$ nằm ngang và tất cả các dãy này sẽ đóng góp ít nhất $2(2n)^2$ đơn vị vào T (đóng góp vào các số a theo định nghĩa như trên). Tương tự với $(2n)^2$ dãy $1 \times 1 \times 2n$ dọc và $(2n)^2$ dãy $1 \times 1 \times 2n$ chéo nên ta suy ra:

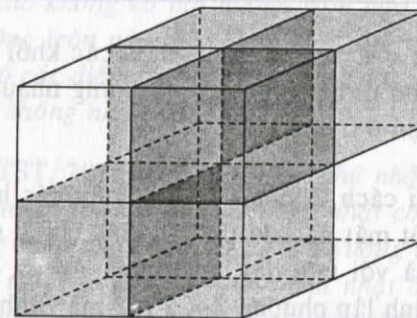
$$T \geq 3 \cdot 2(2n)^2 = 24n^2.$$

Từ đó, ta được $4|S_n| \geq 24n^2$ hay $|S_n| \geq 6n^2, n \in \mathbb{Z}^+$. Đến đây, ta suy ra hai điều sau:

- Trong hình lập phương $2 \times 2 \times 2$, Bình cần chọn ít nhất 6 ô.
- Trong hình lập phương $10 \times 10 \times 10$, Bình cần chọn ít nhất 150 ô.

Ta sẽ chỉ ra cách tô màu 6 ô thỏa mãn đề bài và từ đó chỉ ra cách xây dựng cho hình lập phương $10 \times 10 \times 10$ đã cho. (Trên thực tế, ta hoàn toàn có thể xây dựng cho trường hợp tổng quát cho hình lập phương $2n \times 2n \times 2n$).

Thật vậy, trong hình lập phương $2 \times 2 \times 2$, trừ hai ô nào đó đối xứng nhau qua tâm, Bình chọn 6 ô còn lại như hình bên dưới. Ta sẽ chứng minh cách chọn này thỏa mãn yêu cầu.



Để thấy rằng trong hình lập phương $2 \times 2 \times 2$, chỉ có không quá một dải được tô màu nên hoặc không có ô nào hoặc có hai ô của hình lập phương được tô màu và hai ô đó phải thuộc cùng một dải. Do đó, trong 6 ô được chọn, ta có ba trường hợp:

- Nếu không có ô nào được tô đen thì cả hình lập phương không có.
- Nếu có đúng một ô được tô đen thì ô đen còn lại sẽ thuộc trong hai ô không được chọn có cùng một dải với ô đen đã biết.
- Nếu có hai ô được tô đen thì đó chính là tất cả các ô đen của hình lập phương.

Do đó, cách chọn này với hình lập phương $2 \times 2 \times 2$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Tiếp theo, ta xây dựng cho hình lập phương $10 \times 10 \times 10$ như sau: Ta chia hình lập phương thành 5 lớp $10 \times 10 \times 2$ và ta chia nó thành 25 phần, mỗi phần là một hình lập phương $2 \times 2 \times 2$ rồi đánh số như hình bên dưới:

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Ở lớp thứ i với $i = 1, 2, 3, 4, 5$, ta chọn các khối được đánh số i và với mỗi khối đó, ta bỏ đi hai ô bất kỳ đối xứng nhau qua tâm như cách đã nêu ở trên rồi chọn 6 ô còn lại.

Để thấy rằng với cách tô như vậy, ta chiếu các hình lập phương đã được chọn xuống một mặt nào đó thì các hình chiếu sẽ phủ kín mặt đó. Điều này có nghĩa là với một dải bất kỳ mà An đã chọn thì nó đều đi qua một trong các hình lập phương $2 \times 2 \times 2$ mà Bình chọn như trên.

Khi đó, như đã chứng minh ở trên, ta sẽ xác định được rằng dải đó có được tô màu hay không, tức là xác định được màu của tất cả các ô được tô màu đen của hình lập phương ban đầu. Do đó, cách chọn các ô này thỏa mãn đề bài. Vậy số ô ít nhất mà Bình cần chọn là 150. $\square$

Nhận xét. Có thể nói đây là bài toán khó nhất của kỳ thi, tuy nhiên, cái khó của nó không nặng tính kỹ thuật như bài 3 mà là cái khó về mặt phương pháp. Thực tế nhiều thí sinh đã nói rằng "Em thực sự không biết phải xoay sở thế nào!".

Để làm được bài toán này, trước hết phải thật tập trung để hiểu rõ yêu cầu của bài toán và phải dùng trường hợp $n = 2$ hoặc xét bài toán hai chiều để hình dung bài toán một cách cụ thể nhất.

Trong các nhận xét ở trên thì nhận xét rằng mỗi dải đều có một ô được chọn là khá hiển nhiên (và nhiều thí sinh đã phát biểu được nhận xét này), còn nhận xét rằng ngoài khối u thì trong hợp R_u còn có ít nhất hai khối nữa được chọn thì tinh tế hơn. Khi đã có hai nhận xét này thì việc áp dụng kỹ thuật đếm bằng hai cách để đánh giá là khá tự nhiên.

Việc xây dựng cấu hình cách chọn cũng là một thách thức. Ở đây, trường hợp $n = 2$ đóng một vai trò quan trọng, như những viên gạch để ta xây dựng. Rõ ràng các cấu trúc cơ bản như hình vuông Latin ở trong bài giải đã giúp chúng ta giải quyết bài toán. Các mô hình, cấu trúc, cách sắp xếp cơ bản vì vậy luôn đóng một vai trò quan trọng trong các bài toán xây dựng ví dụ, phản ví dụ. Nếu có làm quen nhiều với các bài toán về cực trị rời rạc thì có thể xử lý bài này, ít nhất là việc xây dựng một cách chủ động hơn.

Trong các kỳ TST trước đây cũng đã từng có một số bài toán sử dụng phương pháp đếm bằng hai cách để đánh giá, chẳng hạn như:

- (1) (Việt Nam TST, 2000) Trong mặt phẳng cho 2000 đường tròn bán kính 1 sao cho không có hai đường tròn nào tiếp xúc nhau và hợp của các đường tròn này tạo thành một tập hợp liên thông. Chứng minh rằng số các điểm thuộc ít nhất hai đường tròn trong các đường tròn đã cho không nhỏ hơn 2000.
- (2) (Việt Nam TST, 2010) Gọi một hình chữ nhật có kích thước 1×2 là hình chữ nhật đơn và một hình chữ nhật có kích thước 2×3 , bỏ đi 2 ô ở góc chéo nhau (tức có 4 ô vuông con) là hình chữ nhật kép. Người ta ghép khít các hình chữ nhật đơn và hình chữ nhật kép này lại với nhau được một bảng hình chữ nhật có kích thước là 2008×2010 . Tìm số nhỏ nhất các hình chữ nhật đơn có thể dùng để ghép.

Một lần nữa thì trong bài toán cực trị ở kỳ thi chọn đội tuyển, dấu bằng xảy ra có thể xây dựng không quá khó nhưng để chỉ ra đó là giá trị tốt nhất thì là điều hoàn toàn không dễ dàng, thậm chí rất khó!

Một vấn đề thú vị đặt ra là nếu kích thước của hình lập phương là lẻ thì ta sẽ có kết quả thế nào? Áp dụng cách đánh giá chặn dưới như trường hợp n chẵn, ta được nếu $n = 2k + 1$ thì số hình vuông cần được đánh dấu phải thỏa mãn bất đẳng thức $|T| \geq \frac{3(2k+1)^2}{2}$. Từ đây suy ra:

$$|T| \geq 6k^2 + 6k + 2.$$

Tuy nhiên, việc xây dựng cách chọn $6k^2 + 6k + 2$ hình lập phương đơn vị thỏa mãn yêu cầu bài toán vẫn là một câu hỏi mở. Với $n = 3$, tức là $k = 1$, hiện nay chưa tìm được cách chọn 14 hình lập phương thỏa mãn yêu cầu bài toán và cũng chưa chứng minh được là cần nhiều hơn. (Ta có thể chỉ được 15 hình lập phương thỏa mãn yêu cầu.)

Ta thử thay giả thiết đã nêu trong đề bài một chút để có bài toán mới: “Bình chọn một ô bất kỳ của hình lập phương rồi hỏi An ô này có màu gì rồi sau đó tiếp tục như thế” và các dữ kiện khác vẫn giữ tương tự. Hoặc bài toán trong trường hợp hai chiều: Thay khối lập phương bởi bảng ô vuông và thay các dải ô vuông được chọn bởi các hàng, cột của bảng. Khai thác các trường hợp này sẽ giúp ta thu được nhiều kết quả thú vị khác!

PHỤ LỤC 1: ĐỀ THI IMO NĂM 2013

Ngày thi thứ nhất

Bài 1. Chứng minh rằng với hai số nguyên dương k, n bất kỳ, tồn tại các số nguyên dương $m_1, m_2, \dots, m_k$ (không nhất thiết khác nhau đôi một) sao cho:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Bài 2. Một cấu hình 4027 điểm trên mặt phẳng được gọi là *Colombian* nếu nó gồm 2013 điểm đỏ và 2014 điểm xanh, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Mặt phẳng được chia thành các miền bởi một số đường thẳng. Một tập hợp các đường thẳng như vậy được gọi là *tốt* với cấu hình Colombian nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau đồng thời được thỏa mãn:

- (i) không có đường thẳng nào đi qua một điểm của cấu hình;
- (ii) không miền nào chứa hai điểm khác màu.

Tìm giá trị k nhỏ nhất sao cho với bất kỳ cấu hình Colombian nào cũng tồn tại một tập hợp tốt có tất cả k đường thẳng.

Bài 3. Gọi A_1 là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC với cạnh BC . Định nghĩa tương tự cho B_1 nằm trên cạnh CA và C_1 nằm trên cạnh AB , lần lượt với đường tròn bàng tiếp góc B và đường tròn bàng tiếp góc C . Giả sử tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Ngày thi thứ hai

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H . Cho W là một điểm tùy ý trên cạnh BC khác với các điểm B và C . Các điểm M, N tương ứng là chân các đường cao hạ từ B và C . Ký hiệu ω_1 là đường tròn ngoại tiếp

tam giác BWN , và gọi X là điểm trên ω_1 sao cho WX là đường kính của ω_1 . Tương tự, ký hiệu ω_2 là đường tròn ngoại tiếp tam giác CWM và gọi Y là điểm trên ω_2 sao cho WY là đường kính của ω_2 . Chứng minh rằng các điểm X, Y, H thẳng hàng.

Bài 5. Ký hiệu $\mathbb{Q}_{>0}$ là tập hợp các số hữu tỷ dương. Cho $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (i) với mọi $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ta có $f(x)f(y) \geq f(xy)$;
- (ii) với mọi $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ta có $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;
- (iii) tồn tại số hữu tỷ $a > 1$ sao cho $f(a) = a$.

Chứng minh rằng $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Bài 6. Cho số nguyên $n \geq 3$. Xét một đường tròn và lấy $n+1$ điểm nằm cách đều nhau trên đường tròn đó. Xét tất cả các cách ghi số $0, 1, \dots, n$ lên các điểm đã lấy sao cho trong mỗi cách ghi, tại mỗi điểm được ghi một số và mỗi số được ghi đúng một lần. Hai cách ghi được gọi là như nhau nếu cách ghi này có thể nhận được từ cách ghi kia nhờ một phép quay quanh tâm đường tròn. Một cách ghi được gọi là *đẹp* nếu với bốn số tùy ý $a < b < c < d$ mà $a+d = b+c$, dây cung nối hai điểm a và d không cắt dây cung nối hai điểm b và c . Ký hiệu M là số các cách ghi đẹp và ký hiệu N là số các cặp có thứ tự (x, y) các số tự nhiên thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y \leq n$ và $\gcd(x, y) = 1$. Chứng minh rằng $M = N + 1$.

PHỤ LỤC 2: MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Nhằm mục đích giúp các em học sinh có thêm nguồn bài tập hay, bổ ích để tự rèn luyện và trau dồi kỹ năng, chúng tôi thực hiện phần này để tuyển chọn ra một số bài toán hay và có giá trị học tập. Cấu trúc bài tập của phần này sẽ trải đều trên các mảng toán Olympic và được chia riêng ra thành từng mục riêng giống như các cuốn tuyển tập các bài toán dự tuyển IMO được ban tổ chức IMO xuất bản hàng năm sau mỗi kỳ thi.

1. Các bài Đại số

Bài tập 1 (Ấn Độ, 2013). Cho a, b, c, x, y, z là 6 số dương thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

$$x + y + z = a + b + c \quad \text{và} \quad xyz = abc.$$

Ngoài ra, giả sử thêm rằng $a \leq x < y < z \leq c$ và $a < b < c$. Chứng minh rằng

$$a = x, \quad b = y, \quad c = z.$$

Bài tập 2. Cho a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 là các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

$$(i) \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0.$$

$$(ii) \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_1.$$

Bài tập 3. Chứng minh rằng phương trình $5x^3 - 40x^2 + 100x - 79 = 0$ có ba nghiệm thực là độ dài ba cạnh của một tam giác có một góc lớn hơn 120° .

Bài tập 4. Cho đa thức $P(x) = 3x^6 - 9x^5 + 18x^4 - 21x^3 + 15x^2 - 6x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $P(x)$ có ba nghiệm a, b, c thực hoặc phức thỏa mãn đẳng thức $|a| + |c| = 3 + |b|$.

Bài tập 5. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x \cdot f(y)) + f(y \cdot f(z)) + f(z \cdot f(x)) = xy + yz + zx, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 6. Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^3 + y^3) + f(x^3 - y^3) = 2x[f^2(x) + f^2(y)] - 2y \cdot f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ là hữu hạn và với mỗi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại các số hữu tỉ a, b sao cho $|b - a| < \frac{1}{2}$ và $f(a) < x < f(b)$.

Bài tập 7. Cho các đa thức khác đa thức hằng $P(x)$ và $Q(x)$ có hệ số cao nhất bằng 1. Chứng minh rằng tổng bình phương các hệ số của đa thức $P(x) \cdot Q(x)$ không nhỏ hơn tổng bình phương các hệ số tự do của các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$.

2. Các bài Giải tích

Bài tập 8. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_0 = \alpha > 0$ và $x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{x_n+1}}$ với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$. Tìm $\lim x_n$.

Bài tập 9. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Xét hàm số $f(x): [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng tồn tại n cặp số a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) với a_i, b_i thuộc $[0, n]$ sao cho $b_i - a_i$ là số nguyên dương và $f(a_i) = f(b_i)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Bài tập 10. So sánh các số:

$$\left(1 + \frac{2}{3^3}\right) \left(1 + \frac{2}{5^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{2}{2013^3}\right) \text{ và } \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Bài tập 11. Xét dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = a \geq 0$ và $x_{n+1} = \frac{10}{1+x_n^2}$ với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$

(a) Chứng minh rằng nếu dãy số có giới hạn hữu hạn thì giới hạn đó phải bằng 2.

(b) Khảo sát sự hội tụ của dãy số khi $a = 0$.

(c) Tìm tất cả các giá trị (không âm) của a để dãy số có giới hạn hữu hạn.

Bài tập 12. Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{x}$.

(a) Chứng minh rằng đồ thị hàm số có ba điểm cực trị không thẳng hàng.

(b) Gọi A, B, C là ba điểm cực trị. Tính diện tích tam giác ABC .

(c) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài tập 13.

(a) Cho các dãy số $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ và $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Chứng minh rằng (x_n) là dãy số tăng, còn (y_n) là dãy số giảm.

(b) Tìm số a lớn nhất sao cho dãy $z_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+a}$ là dãy số tăng.

Bài tập 14. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = 1$ và $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt[3]{x_n}}$ với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$

(a) Chứng minh rằng $\lim x_n = +\infty$.

(b) Tìm số thực α sao cho dãy số $\{\frac{x_n}{n^\alpha}\}$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

3. Các bài Hình học

Bài tập 15. Trên mặt phẳng cho đoạn thẳng AB cố định và M là một điểm không nằm trên đường thẳng đi qua A và B . Gọi N là một điểm bất kỳ trên phân giác của góc AMB . Đường phân giác ngoài góc AMB cắt các đường thẳng NA, NB lần lượt tại P, Q . Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R , đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính NP tại S và R, S khác M . Chứng minh rằng đường trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua một điểm cố định với mọi vị trí của M và N .

Bài tập 16. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên nó. Một đường thẳng d cố định nằm ngoài (O) . Gọi C là điểm bất kỳ trên (O) và không trùng với A, B . Các tia AC, BC cắt d theo thứ tự tại D, E . Chứng minh rằng đường tròn đường kính DE luôn tiếp xúc với hai đường tròn cố định khi C di động.

Bài tập 17. Cho tam giác ABC với trực tâm H . Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác AH của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH, ACH đi qua trung điểm của BC .

Bài tập 18. Cho lục giác lồi $ABCDMN$ nội tiếp trong đường tròn đường kính MN và có $AC = BD$. Giả sử F, P là các giao điểm của MC và AD, AN ; E, Q lần lượt là giao điểm của MD và BC, BN . Chứng minh rằng $\frac{CP}{CM} + \frac{FP}{FM} + \frac{DQ}{DM} + \frac{EQ}{EM}$ không đổi và $IP = IQ$ với I là giao điểm của AD, BC .

Bài tập 19. Cho tam giác ABC và đường tròn (O_1) nằm trong tam giác ABC , tiếp xúc với AB, AC . Đường tròn (O_2) qua B, C và tiếp xúc ngoài với (O_1) tại T . Chứng minh phân giác trong của góc BTC luôn qua một điểm cố định.

Bài tập 20. Cho tam giác ABC nhọn không cân và AH_1, BH_2, CH_3 là các đường cao của tam giác. Đường tròn nội tiếp tam giác này tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại T_1, T_2, T_3 . Với $k = 1, 2, 3$, xét các điểm P_i nằm trên đường thẳng H_iH_{i+1} (quy ước $H_4 \equiv H_1$) và thỏa mãn tam giác $H_iP_iT_i$ nhọn và cân tại H_i . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $T_1P_1T_2, T_2P_2T_3, T_3P_3T_1$ cùng đi qua trực tâm của tam giác $T_1T_2T_3$.

Bài tập 21. Cho hai điểm A, B phân biệt nằm trên đường tròn (O) và C nằm ngoài (O) . Gọi CS và CT là các tiếp tuyến của C với (O) với S, T là các tiếp điểm; M là trung điểm của cung nhỏ AB . Các đường thẳng MS, MT cắt AB lần lượt tại E, F . Đường thẳng đi qua E, F vuông góc với AB cắt OS, OT lần lượt tại X, Y . Một đường thẳng bất kỳ qua C cắt (O) tại P, Q (P nằm giữa C và Q). Gọi R là giao của MP với AB . Z là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (PQR) . Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

4. Các bài Số học

Bài tập 22. Cho các số nguyên tố $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ đôi một khác nhau và cho các số tự nhiên bất kỳ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ đều lớn hơn 2. Chứng minh rằng số các cặp (x, y) không có thứ tự, nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn đẳng thức sau:

$$x^5 + y^5 = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdots p_k^{n_k}$$

không vượt quá 2^{k+1} .

Bài tập 23. Cho p là số nguyên tố và a, b, c là các số nguyên bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên x, y, z không đồng thời chia hết cho p sao cho $ax^2 + by^2 + cz^2$ chia hết cho p .

Bài tập 24. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p, q sao cho $(7p+1) \vdots q$ và $(7q+1) \vdots p$.

Bài tập 25. Cho hàm số $f(x) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$f(m+n) + f(mn-1) = f(m) \cdot f(n) + a,$$

với mọi số nguyên m, n và a là một tham số nguyên nào đó.

(a) Chứng minh rằng với $a = 2$, tồn tại đúng 1 hàm số thỏa mãn đề bài. Xác định hàm số đó.

(b) Hãy tìm tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài với $a = 0$.

Bài tập 26. Cho dãy (u_n) được xác định bởi $u_0 = u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{(2n+3)u_n + 3nu_{n-1}}{n+3}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy đều là số nguyên.

Bài tập 27. Cho p là số nguyên tố lẻ, đặt $f(x) = (x+1) \cdots (x+p-1)$.

(a) Chứng minh rằng $pf(x) = (x+1) \cdot f(x+1) - x \cdot f(x)$.

(b) Giả sử $f(x) = x^{p-1} + a_1x^{p-2} + \cdots + a_{p-2}x + a_{p-1}$. Từ đẳng thức trên, hãy suy ra rằng: $pa_i = \sum_{j=0}^i C_{p-j}^{j+1} a_j$.

Ở đây ta quy ước $a_0 = 1$.

(c) (Định lý Lagrange) Chứng minh rằng a_i chia hết cho p với mọi $i = 1, 2, \dots, p-2$.

(d) Chứng minh rằng nếu $p > 3$ là số nguyên tố thì mẫu số của phân số $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}$ chia hết cho p^2 .

(e) Chứng minh rằng nếu $p > 3$ là số nguyên tố thì $C_{2p-1}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}$.

Bài tập 28. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương x, y sao cho $(x^2+1) \vdots y$ và $(y^2+1) \vdots x$.